



دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم پایه
استان چهارمحال بختیاری
مرکز شهرکرد

پایان نامه برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض (جبر)
گروه ریاضی

تحت عنوان : شعاع طیفی فاصله‌ای و انرژی فاصله‌ای گراف‌ها

پژوهشگر: خاطره بچاری‌نژاد

استاد راهنما: دکتر بیژن طائری

استاد مشاور: دکتر محمد جواد عطایی

اسفند ۱۳۹۱

چکیده

به یک گراف همبند ساده متناهی (گراف بدون جهت بدون طوقه ویال چند گانه) $G = (V, E)$ با $n = |V|$ و $m = |E|$ راس $m = |E|$ یال می‌توان ماتریس‌های زیادی از جمله ماتریس فاصله و ماتریس مجاورت نظیر کرد که در مورد هر یک از این ماتریس‌ها مطالعات زیادی صورت گرفته است. ماتریس فاصله‌ی گراف G که با $D(G)$ نشان داده می‌شود یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌ی (i, j) آن به ازای $1 \leq i, j \leq n$ برابر d_{ij} است. به مقادیرهای ویژه D ، $-D(G)$ مقدار ویژه می‌گویند. چون $D(G)$ یک ماتریس متقارن حقیقی است، مقادیر ویژه‌ی آن نیز حقیقی هستند و می‌توانند به صورت غیرصعودی $\rho_1 \geq \dots \geq \rho_n$ مرتب شوند. بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس فاصله یک گراف را شعاع طیفی فاصله‌ای آن گراف نامیم که آن را با $\rho(G)$ نشان می‌دهیم. مجموع قدر مطلق‌های مقادیر ویژه ماتریس فاصله‌ای یک گراف G را انرژی فاصله‌ای آن می‌نامیم و با $E(G)$ نشان می‌دهیم. در این پایان‌نامه کران‌هایی برای شعاع طیفی فاصله‌ای از یک گراف ساده و یک گراف دو بخشی را بررسی می‌کنیم و هم‌چنین کران‌های بالا و پایینی برای انرژی فاصله‌ی گراف ساده و گراف‌های دو بخشی همبند را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مقالات زیر از منابع اصلی این پایان‌نامه هستند.

- Zhou, B. Ilic, A. (2010). **On distance spectral radius and distance energy of graphs.** MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 64:261-280.
- Das, Kinkar Ch. (2008). **On the largest eigenvalue of the distance matrix of a bipartite graph.** MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 62: 667-672.
- Zhou, B and Trinajstić, N. (2007). **On the largest eigenvalue of the distance matrix of a connected graph.** Chem. Phys. Lett., 447: 384–387.

لغات کلیدی: شعاع طیفی فاصله‌ای - انرژی فاصله‌ای - ماتریس فاصله

فهرست مطالب

(آ)	فهرست مطالب
۳	۱ مفاهیم مقدماتی و پیش نیازها
۳	۱.۱ مفاهیم پایه‌ای از جبرخطی
۹	۲.۱ مفاهیم مقدماتی گراف‌ها
۱۳	۳.۱ چند رده ازگراف‌ها
۱۶	۴.۱ برخی قضایا و نتایج مقدماتی
۲۳	۲ کران‌هایی برای شعاع طیفی فاصله‌ی گراف‌ها
۲۳	۱.۲ کران‌های بالا و پایین برای $\rho(G)$ در یک گراف همبند G
۴۲	۲.۲ کران‌های پایین برای $DE(G)$
۶۰	۳.۲ کران‌های بالایی برای $DE(G)$
۶۲	۳ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس فاصله‌ی گراف دو بخشی
۶۲	۱.۳ کران پایین شعاع طیفی فاصله‌ای گراف دو بخشی
۷۱	منابع
۷۴	واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی
۸۱	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی
۸۶	نمایه
۸۷	فهرست نمادها

پیشگفتار

برای گراف ساده‌ی همبند G از مرتبه‌ی n ، ماتریس فاصله، ماتریسی متقارن و تحویل‌ناپذیر است. این ماتریس و مفاهیم مرتبط با آن مانند طیف فاصله (مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله)، شعاع طیفی فاصله‌ی (بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس فاصله) و انرژی فاصله‌ی (مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه‌ی ماتریس فاصله) کاربردهای وسیعی در شیمی و دیگر شاخه‌های علوم دارد. بالابان^۱ و دیگران در مقاله‌ی [۴] از شعاع طیفی فاصله‌ی برای توصیف ساختارهای ملکولی استفاده کرد. همان زمان در [۶] گاتمن^۲، شعاع طیفی فاصله‌ی را برای استنباط گستردگی شاخه‌ای و مدل نقطه جوش آلکان‌ها به‌کار برد. ژئو^۳ در [۲۸] کران بالا و پایینی برای شعاع طیفی فاصله‌ی (بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس فاصله) درخت‌ها ارائه کرده است. در برخی مقالات ثابت شده است که طیف فاصله‌ی درخت‌ها و گراف‌های تک دوری دقیقاً یک مقدار ویژه‌ی مثبت دارد و بنابراین انرژی فاصله‌ی برای درخت‌ها و گراف‌های تک دوری دو برابر شعاع طیفی فاصله‌ی آن‌ها است. اخیراً ژئو^۴ و تری نجستیک^۵ در مقالات [۲۷] و [۲۹] کران‌های بالا و پایینی را برای شعاع طیفی فاصله‌ی، برحسب تعداد رئوس، اندیس وینر و اندیس زاگرب به‌دست آورده‌اند. در [۱۸] سابهی و پاور^۶ ثابت کردند که بین درخت‌های n راسی ($n \geq 3$)، مسیر P_n دارای شعاع طیفی فاصله‌ی ماکسیمم است. به علاوه در [۲۱] استوانویچ^۷ والیچ^۸ ثابت کرده‌اند که ستاره‌ی S_n گراف با شعاع طیفی فاصله‌ی می‌نیمم در بین درخت‌های n راسی است. هم‌چنین در میان درخت‌هایی با درجه راس ماکسیمم Δ ، گراف جارو شعاع طیفی فاصله‌ی ماکسیمم را دارد. در سال ۲۰۰۷ در مقالات [۲۹] و [۲۷] و [۳۱] کران‌های بالا و پایینی برای شعاع طیفی فاصله‌ی یک گراف همبند بررسی شده است. در سال‌های ۲۰۱۰، ۲۰۰۹، ۲۰۰۸ محققان کران‌های بالا و پایینی برای انرژی فاصله‌ی

^۱Balaban

^۲Gatman

^۳Zhou

^۴Zhou

^۵Trinajstik

^۶Subhi and Powers

^۷Stevanovic

^۸Ilic

در گراف‌ها در مقالات [۹]، [۱۶]، [۱۰]، [۱۴]، [۲]، [۲۲]، [۱۱]، [۱۷] و [۸] به دست آورده‌اند. در این پایان‌نامه سعی کرده‌ایم به مبحث ماتریس فاصله‌ی گراف‌ها و مفاهیم مرتبط از جمله طیف فاصله، شعاع طیفی فاصله‌ای و انرژی فاصله‌ای بپردازیم. کران‌های بالا و پایینی روی شعاع طیفی ماتریس فاصله و انرژی فاصله‌ای گراف‌ها ارائه دهیم.

در فصل اول تعاریف ابتدایی در زمینه‌ی گراف‌ها، ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله‌ی گراف‌ها و شعاع طیفی و انرژی فاصله‌ای گراف‌ها را بیان می‌کنیم. هم‌چنین قضایای اساسی و مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز را بیان می‌کنیم. در فصل دوم کران‌های بالا و پایین برای شعاع طیفی فاصله و انرژی فاصله‌ای از گراف‌های معمولی و همبند را بدست می‌آوریم. در فصل سوم کران‌های پایین برای شعاع طیفی فاصله از گراف‌های دوبخشی و همبند را بررسی می‌کنیم.