

به نام خدا
امتحان میان‌ترم مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی
(دوم آذر ۱۳۹۲)

۱. دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 3 \end{cases}$$

۲. نشان دهید

(الف) ماتریس U وارون خودش است اگر و تنها اگر ماتریس خودتوان P وجود داشته باشد

$$\text{که } U = I - 2P.$$

(ب) به ازای هر ماتریس خودتوان P و هر $a \neq 1$ ، ماتریس $I - aP$ وارون‌پذیر است و

$$(I - aP)^{-1} = I - \frac{a}{a-1}P.$$

۳. نشان دهید $\{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$ پایه‌ای برای \mathbb{R}^3 است و مختصات

بردار $X = (a, b, c)$ را نسبت به این پایه بیابید.

۴. فرض کنید V یک فضای برداری با تولید متناهی و k مولد روی میدان F باشد. اگر

$X_r = \{v_1, \dots, v_r\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی در V باشد، آنگاه بردارهای

$v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ وجود دارند که $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V است.

۵. یک دستگاه معادله‌ی خطی همگن بیابید که فضای جواب آن توسط بردارهای زیر تولید شود

$$X_1 = (1, 4, 0, 9), X_2 = (3, 4, -2, 5), X_3 = (-1, 0, 1, 2) \in \mathbb{R}^4.$$

موفق باشید

وقت: ۹۰ دقیقه

هر سوال ۱۴ نمره دارد

ارزش امتحان: ۷۰ نمره (از ۲۰۰ نمره)