به نام خدا

امتحان پایان‌ترم مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

(یازدهم دی ۱۳۹۲)

۱. فرض کنید تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $T(x,y,z)=(x-2y+2z,x-3y+z,x+4z)$ داده شده باشد. ماتریس T را نسبت به پایه‌ی $\mathscr{A}=\{v_1,v_2,v_3\}$ بیابید، که در آن $v_1=(0,1,1)$، $v_2=(1,0,1)$، و $v_3=(1,1,0)$.

---

۲. قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه را بیان و ثابت کنید.

---

۳. برای ماتریس حقیقی A ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP$ مثلثی باشد، که در آن

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

---

۴. ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP$ به صورت ژردان باشد، که در آن A ماتریس زیر است. علاوه بر آن ماتریس ژردان مشابه با A و چندجمله‌ای می‌نیمال A را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3\\ -1 & 5 & -7\\ -2 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

---

۵. فرض کنید $T:V\longrightarrow W$، یک تبدیل خطی یک‌به‌یک باشد، که در آن V و W فضاهای برداری روی میدان F هستند و $\dim W<\infty$. نشان دهید

(آ) $\dim V<\infty$

(ب) تبدیل خطی $S:W\longrightarrow V$ وجود دارد که $ST=\mathrm{id}_V$.

---

۶. فرض کنید $T:V\longrightarrow V$ یک تبدیل خطی پوچ‌توان باشد، که در آن V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F است، به طوری که $T^{k+1}=\mathbf{0}$ و $T^k\neq\mathbf{0}$. ثابت کنید

$$\ker T\subset\ker T^2\subset\cdots\subset\ker T^{k-1}\subset\ker T^k\subset\ker T^{k+1}=V$$

نتیجه بگیرید یک پایه از V وجود دارد که ماتریس T نسبت به آن به صورت بالا مثلثی با درایه‌های قطری 0 است.

موفق باشید

وقت: ۱۲۰ دقیقه

هر سوال ۲۲ نمره دارد

ارزش امتحان: ۱۳۰ نمره (از ۲۰۰ نمره)