($\Longrightarrow$) فرض کنید G گروه آزاد روی X باشد. فرض کنید همریختی‌های $\varepsilon : K \longrightarrow H$ و $\alpha : G \longrightarrow H$ داده شده باشند، که در آن ε پوشا است. به ازای هر $x \in X$، داریم $x\alpha \in H$ و چون ε پوشا است عضو $k_x \in K$ وجود دارد که $k_x\varepsilon = x\alpha$. چون G آزاد است، همریختی یکتای $\beta : G \longrightarrow K$ وجود دارد که $x\beta = k_x$. بنابراین $x\beta\varepsilon = k_x\varepsilon = x\alpha$ و چون G روی X آزاد است، به ازای هر $g \in G$ داریم $g\beta\varepsilon = g\alpha$. پس $\beta\varepsilon = \alpha$. ∎

فرض کنید H یک زیرگروه نرمال از گروه G باشد. گوییم G روی H تجزیه می‌شود، هرگاه زیرگروه K از G وجود داشته باشد به طوری‌که $G = KH$ و $H \cap K = ۱$. زیرگروه K را مکمل H در G نامیم. در این حالت طبق قضیه‌ی دوم یکریختی داریم $G/H = KH/H \cong K/(H \cap K) \cong K$. توجه کنید که زیرگروه K مکمل H در G است اگر و تنها اگر هر عضو از G را بتوان به صورت یکتای hk نوشت که در آن $h \in H$ و $k \in K$.

نتیجه ۳۸.۱. فرض کنید H زیرگروه یک گروه G باشد . اگر G/H آزاد باشد، آن‌گاه G روی H تجزیه می‌شود، یعنی زیرگروه K از G وجود دارد که $G = HK$ و $H \cap K = ۱$.

اثبات. همریختی طبیعی $\varepsilon : G \longrightarrow G/H$ و همریختی همانی $\alpha = \mathrm{id} : G/H \longrightarrow G/H$ را در نظر می‌گیریم. چون G/H آزاد است، همریختی $\beta : G/H \longrightarrow G$ وجود دارد $\beta\varepsilon = \mathrm{id}$. چون $\ker\varepsilon = H$ کافی است نشان دهیم که

$$G = (\ker\varepsilon)(\operatorname{Im}\beta) \quad \text{و} \quad \ker\varepsilon \cap \operatorname{Im}\beta = ۱.$$

اگر $g \in G$، آن‌گاه چون $\beta\varepsilon = \mathrm{id}$ داریم

$$(g(g^{-۱}\varepsilon\beta)\varepsilon = (g\varepsilon)(g^{-۱}\varepsilon\beta\varepsilon) = (g\varepsilon)(g^{-۱}\varepsilon) = (gg^{-۱})\varepsilon = ۱\varepsilon = ۱$$

و در نتیجه $g(g^{-۱}\varepsilon\beta) \in \ker\varepsilon$. پس

$$g = [g(g^{-۱}\varepsilon\beta)](g\varepsilon\beta) \in (\ker\varepsilon)(\operatorname{Im}\beta)$$

از این‌رو $G = (\ker\varepsilon)(\operatorname{Im}\beta)$. اکنون اگر $g \in \ker\varepsilon \cap \operatorname{Im}\beta$، آن‌گاه $g = g_۱H\beta$، که در آن $g_۱ \in G$ و هم‌چنین $g\varepsilon = ۱_{G/H}$. در نتیجه $۱_{G/H} = g\varepsilon = (g_۱H)\beta\varepsilon = g_۱H$ و داریم $g = (g_۱H)\beta = (۱_{G/H})\beta = ۱$. از این رو $\ker\varepsilon \cap \operatorname{Im}\beta = ۱$ و حکم ثابت است. ∎

فرض کنید F یک گروه آزاد روی مجموعه‌ی X با تابع یک‌به‌یک $\sigma : X \longrightarrow F$ باشد. به ازای هر $x \in X$ تابع $f_x : X \longrightarrow \mathbb{Z}_۲$ را با ضابطه‌ی

$$yf_x = \begin{cases} ۱ & x = y \\ ۰ & x \neq y \end{cases}$$