تمرین

۱. همه‌ی ماتریس‌های $A \in M_۲(\mathbb{R})$ را بیابید که $A^۲ = \mathbf{0}$.

۲. همه‌ی ماتریس‌های $A \in M_۲(\mathbb{R})$ را بیابید که $A^۲ = I$.

۳. فرض کنید $A, B \in M_{m\times n}(F)$ و $\lambda \in F$. نشان دهید

(آ) $(A^\top)^\top = A$ (ب) $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ (پ) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

۴. نشان دهید که اگر $A \in M_{m\times n}(F)$ و $B \in M_{n\times m}(F)$، آن‌گاه داریم $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

۵. نشان دهید که اگر $A \in M_n(F)$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $(A^\top)^{-۱} = (A^{-۱})^\top$.

۶. فرض کنید $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ و $\lambda \in \mathbb{C}$. نشان دهید

(آ) $(A^*)^* = A$ (ب) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ (پ) $(A+B)^* = A^* + B^*$

۷. نشان دهید که اگر $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ و $B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$، آن‌گاه داریم $(AB)^* = B^* A^*$.

۸. فرض کنید $X, Y, Z \in F^n$ و $\lambda \in F$. نشان دهید

(آ) $X \cdot Y \in F$ (ب) $X \cdot Y = Y \cdot X$ (پ) $X \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot X$

(ت) $(\lambda X) \cdot Y = \lambda (X \cdot Y) = X \cdot (\lambda Y)$ (ث) $X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$

۹. ماتریس A^n را محاسبه کنید هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}.$$

۱۰. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

مجموعه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ که با A جابه‌جا می‌شوند، یعنی اعضای مجموعه‌ی $\{B \in M_۲(F) \mid AB = BA\}$ را بیابید.

۱۱. (آ) نشان دهید که $A \in M_n(F)$ با تمامی ماتریس‌های $n \times n$ جابه‌جا می‌شود (یعنی به ازای هر $B \in M_n(F)$، $AB = BA$) اگر و تنها اگر با هر ماتریس E_{ij}، $۱ \leq i, j \leq n$، جابه‌جا شود، که در آن E_{ij} ماتریسی است که درایه‌ی ijام آن برابر ۱ و سایر درایه‌های آن صفر است.
(ب) نشان دهید که اگر $A \in M_n(F)$ با تمامی ماتریس‌های $n \times n$ جابه‌جا شود، آن‌گاه A یک ماتریس قطری است.

۱۲. فرض کنید $\lambda \in F$ و $A \in M_n(F)$ طوری باشد که $\sum_{j=۱}^{n}[A]_{ij} = \lambda$، به ازای هر $i = ۱, \ldots, n$. نشان دهید بردار $\mathbf{0} \neq X \in F^n$ وجود دارد که $AX = \lambda X$.

۱۳. فرض کنید $A \in M_n(F)$ به صورت زیر باشد

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ . & & \ddots & & & . \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = [\delta_{i,j+۱}]_{n \times n}.$$

نشان دهید.
(آ) $A^n = \mathbf{0}$ و $A^{n-۱} \neq \mathbf{0}$.
(ب) یک ماتریس با A جابه‌جا می‌شود اگر و تنها اگر به صورت

$$a_۰ I + a_۱ A + a_۲ A^۲ + \cdots + a_{n-۱} A^{n-۱}$$

باشد، که در آن $a_i \in F$.

۱۴. A^n را بیابید، هرگاه $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix}$.

۱۵. A^n را بیابید، هرگاه $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$.

۱۶. نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در چندجمله‌ای
$$f(x) = x^{۲} - (a+d)x + (ad - bc)$$
صدق می‌کند، یعنی $A^{۲} - (a+d)A + (ad-bc)I = \mathbf{0}$.

۱۷. نشان دهید که اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی n داریم
$$A^n = \frac{۳^n - ۱}{۲}A + \frac{۳ - ۳^n}{۲}I, \quad n \geq ۱.$$

۱۸. فرض کنید جملات دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=۰}^{+\infty}$ در رابطه‌ی بازگشتی $x_{n+۱} = ax_n + bx_{n-۱}$، $n \geq ۱$، صدق کنند. نشان دهید
$$X_{n+۱} = AX_n,$$
که در آن
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-۱} \end{bmatrix}.$$
نتیجه بگیرید $X_{n+۱} = A^n X_۱$. در صورتی که $a = ۴$ و $b = -۳$، x_n را بیابید.

۳.۱ دستگاه معادله‌ی خطی

یک دستگاه m معادله و n مجهول روی میدان F به صورت
$$\begin{cases} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n = b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n = b_۲ \\ \vdots \\ a_{m۱}x_۱ + a_{m۲}x_۲ + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (۱)$$
است، که در آن a_{ij} و b_i، $i = ۱, ۲, \ldots, m$، $j = ۱, ۲, \ldots, n$، اعضای مشخصی از F هستند و x_i، $i = ۱, ۲, \ldots, n$ مجهول هستند. دستگاه (۱) را می‌توان به صورت خلاصه‌ی زیر نوشت
$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m.$$