

نمونه سوال میان ترم

۱. پایه‌ای برای فضای تولید شده توسط بردارهای زیر در \mathbf{R}^4 بیابید

$$\{1, -1, 1, 1\}, \{1, -3, 1, 1\}, \{2, 3, -1, 2\}, \{-4, -13, 5, -4\}$$

۲. دو پایه‌ی زیر از \mathbf{R}^4 را در نظر بگیرید

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 1, 2)\}, \quad B_2 = \{(2, 1, 0), (0, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$$

ماتریس تبدیل پایه‌ی P از پایه‌ی B_1 به پایه‌ی B_2 را بیابید. به علاوه ماتریس P^{-1} از B_2 به B_1 را بیابید.

۳. به ازای چه مقدار a دستگاه زیر دارای جواب است

$$\begin{cases} -3x + y + 5z = 4a \\ x + y + z = 4 \\ -2x + z = -3 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

۴. اگر $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ و w_1, \dots, w_m بردارهایی در V باشند که $m > n$ نشان دهید w_1, \dots, w_m وابسته‌ی خطی هستند.

نمونه سوال میان ترم

۱- وارون ماتریس زیر را (در صورت وجود) بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

۲- دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + z = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

۳- پایه‌ای برای فضای تولید شده توسط بردارهای زیردر \mathbf{R}^4 بیابید
 $\{1, -1, 1, 1\}, \{1, -3, 1, 1\}, \{2, 3, -1, 2\}, \{-4, -13, 5, -4\}$

۴- فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد به طوری که $A^k = 0$ و $A^{k-1} \neq 0$ ، که در آن k عدد صحیح مثبت است. نشان دهید به ازای هر اسکالر a_0, a_1, \dots, a_{k-1} که $a_0 \neq 0$ ماتریس $a_0 I + a_1 A + \dots + a_{k-1} A^{k-1}$ وارون‌پذیر است.

۵- فرض کنید V یک فضای برداری متناهی‌تولید شده با k مولد روی میدان F باشد. اگر $X_r = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ یک زیرمجموعه‌ی مستقل خطی در V باشد، آنگاه بردارهای $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n \in V$ وجود دارند که $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک پایه برای V است.

نمونه سوال پایان ترم

۱- فرض کنید $T: R^2 \rightarrow R^2$ تبدیل خطی باشد به طوری که $T(2,6)=(1,7)$ و $T(-1,2)=(4,1)$. ماتریس T را در پایه‌ی استاندارد بیابید.

(۲۵ نمره)

۲- فرض کنید V و W فضاهای برداری روی میدان F باشند و $\dim W < \infty$. اگر $T: V \rightarrow W$ تبدیل خطی یک به یک باشد، نشان دهید

(الف) $\dim V < \infty$.

(ب) تبدیل خطی $T: W \rightarrow V$ وجود دارد که $ST=I$.

(۲۵ نمره)

۳- فرض کنید A ماتریس حقیقی زیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی A را بیابید. ماتریس وارون‌پذیر P را (در صورت وجود) طوری بیابید که $P^{-1}AP$ ماتریس قطری باشد.

(۲۵ نمره)

۴- فرض کنید A ماتریس حقیقی زیر باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

نشان دهید A یک ماتریس پوچ‌توان است و ماتریس بالا مثلثی مشابه با A و هم‌چنین ماتریس تبدیل پایه را بیابید.

(۲۵ نمره)

۵- ثابت کنید تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای اگر چندجمله‌ای می‌نیمال T به صورت

$$m(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)$$

(۲۵ نمره)

۶- فرض کنید a بردار ثابت ناصفری در F^n (F یک میدان) باشد. نشان دهید تبدیل خطی $T: Mat_n(F) \rightarrow F^n$ با ضابطه‌ی $TA = Aa$ پوشا است.

(۲۵ نمره)

نمونه سوال پایان ترم

به پنج سوال از شش سوال زیر جواب دهید (نمره سوالات یکسان است ۲۵ نمره)

۱- قضیه‌ی پوچی به علاوه‌ی رتبه را بیان و ثابت کنید.

۲- نشان دهید ماتریس A قطری شدنی است و ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP$ قطری باشد، که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 8 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

۳- ماتریس بالا مثلثی B و ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP = B$ ، که در آن

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس وارون‌پذیر P را بیابید که $P^{-1}AP = J$ ، که در آن J ماتریس ژردان است و

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس تبدیل خطی $T: R^3 \rightarrow R^3$ با ضابطه‌ی $T(x, y, z) = (3x + 2y - 2z, x + 2y - z, x + y)$ را نسبت به

پایه‌ی $\{v_1, v_2, v_3\}$ بیابید، که در آن $v_1 = (0, 1, 1)$ ، $v_2 = (1, 0, 1)$ ، $v_3 = (1, 1, 0)$.

۶- فرض کنید $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی پوشا باشد، که در آن و فضاهای برداری متناهیاً تولید شده

هستند. نشان دهید تبدیل خطی $S: W \rightarrow V$ وجود دارد که $TS = id_W$.

نمونه سوال میان ترم و پایان ترم

۱- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه ثابت کنید $A^2 = 2A - I$ و A^{100} را بیابید.
(۹ نمره)

۲- دستگاه معادله‌ی زیر را به روش حذفی گاوس-ژردان حل کنید

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \\ 7x + 4y + 5z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(۱۰ نمره)

۳- اگر سطرهای یک ماتریس A وابسته‌ی خطی باشند، ثابت کنید $\det(A) = 0$.
(۹ نمره)

۴- وارون ماتریس زیر را بیابید

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(۹ نمره)

۵- اگر $T: V \rightarrow V$ تبدیل خطی باشد T^2 دارای مقدار ویژه λ^2 باشد، آنگاه ثابت کنید حداقل یکی از مقادیر λ یا $-\lambda$ مقدار ویژه‌ی برای T است. در حالت $\lambda = 0$ چه می‌توان گفت.

(۹ نمره)

۶- فرض کنید u_1, u_2, \dots, u_k بردارهای ویژه متناظر مقادیر ویژه متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ از تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ باشند. ثابت کنید u_1, u_2, \dots, u_k مستقل خطی هستند.

(۱۰ نمره)

۷- اگر A و B ماتریسهای مربع بوده و A وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید که مقادیر ویژه‌ی AB و BA یکسان هستند.

(۹ نمره)