مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

حل برخی از تمرین‌ها، ویرایش اول (ممکن است ایراد وجود داشته باشد)

(حل تمرین‌های فصل ۱)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

حل تمرین‌های بخش ۱.۱ صفحه‌ی ۴

۱. چون به ازای هر $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ داریم

$$\begin{aligned}
&-(a+b\sqrt{2}) = -a-b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\\
&(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\\
&(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\\
&\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^{2}-2b^{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})
\end{aligned}$$

پس $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ یک زیرمیدان $\mathbb{R}$ است. اما پاسخ به سوال در حالت کلی منفی است، به عنوان مثال s را یک عدد اصم که $s^{2} \notin \mathbb{Q}$ (مثلاً $s=\pi$) در نظر بگیرید.

۲. مجموعه‌ی $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ با اعمال متعارف جمع و ضرب اعداد حقیقی میدان نیست. در واقع $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ همه‌ی خواص میدان را دارد به جز اینکه بعضی از اعضای آن وارون‌پذیر نیستند. به عنوان مثال $2+\sqrt{2}$ وارون پذیر نیست، زیرا اگر $2+\sqrt{2}$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه عضو $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ وجود دارد که $(2+\sqrt{2})(a+b\sqrt{2}) = 1$. در نتیجه $(2a+2b)+(a+2b)\sqrt{2}$ و بنابراین $2a+2b=1$ و $a+2b=0$. که از آنجا نتیجه می‌شود $a=0$ و $2b=-1$، یعنی b عدد صحیح نیست، که تناقض است.

۳. فرض کنید F یک زیرمیدان $\mathbb{R}$ باشد. چون $1 \in F$، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $n = n1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-بار}} \in F$ و بنابراین $-n \in F$ پس $\mathbb{Z} \subseteq F$. در نتیجه به ازای هر $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ داریم $\frac{1}{n} \in F$ در نهایت به ازای هر $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ داریم $\frac{m}{n} = m\frac{1}{n} \in F$ پس $\mathbb{Q} \subseteq F$.

۴. جدول‌های جمع و ضرب در $\mathbb{Z}_5$ عبارت است از

+	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۱	۲	۳	۴	۰
۲	۲	۳	۴	۰	۱
۳	۳	۴	۰	۱	۲
۴	۴	۰	۱	۲	۳

×	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴
۲	۰	۲	۴	۱	۳
۳	۰	۳	۱	۴	۲
۴	۰	۴	۳	۲	۱

جدول‌های جمع و ضرب در $\mathbb{Z}_7$ عبارت است از

×	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۰	۲	۴	۶	۱	۳	۵
۳	۰	۳	۶	۲	۵	۱	۴
۴	۰	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۵	۰	۵	۳	۱	۶	۴	۲
۶	۰	۶	۵	۴	۳	۲	۱

+	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۰
۲	۲	۳	۴	۵	۶	۰	۱
۳	۳	۴	۵	۶	۰	۱	۲
۴	۴	۵	۶	۰	۱	۲	۳
۵	۵	۶	۰	۱	۲	۳	۴
۶	۶	۰	۱	۲	۳	۴	۵

حل تمرین‌های بخش ۲.۱ صفحه‌ی ۱۵

۱. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ یک ماتریس باشد که $A^2=\mathbf{0}$. در این صورت

$$\mathbf{0}=A^2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\begin{cases}a^2+bc=0\\(a+d)b=0\\(a+d)c=0\\bc+d^2=0\end{cases}$$

از معادله‌های اول و چهارم به دست می‌آوریم $a^2=d^2$ و در نتیجه $d=\pm a$. از معادله‌های دوم و سوم معلوم است که باید بر اساس این‌که b یا c برابر صفر باشند یا نه باید سه حالت در نظر بگیریم.

حالت اول: $b=0$. در این حالت از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $a^2=0$، یعنی $a=0$. چون $d=\pm a$ پس در این حالت داریم $a=d=b=0$.

حالت دوم: $c=0$. در این حالت نیز از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $a^2=0$، یعنی $a=0$. از این‌رو در این حالت نیز داریم $a=d=c=0$.

حالت سوم: $b\neq 0$ و $c\neq 0$. در این حالت از معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود $d=-a$. از معادله‌ی اول داریم $a^2=-bc$ بنابر این نتیجه می‌گیریم که یا $a=b=d=0$ یا $d=-a$، $c=-b^{-1}a^2$.

بنابراین از سه حالت بالا نتیجه می‌گیریم که ماتریس A به یکی از صورت‌های زیر است

$$c\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad b\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a&b\\-b^{-1}a^2&-a\end{bmatrix},\quad (a,b\neq 0)$$

۲. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ یک ماتریس باشد که $A^2=I$. در این صورت

$$I=A^2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+dc&bc+d^2\end{bmatrix}$$

و در نتیجه

$$\begin{cases}a^2+bc=1\\(a+d)b=0\\(a+d)c=0\\bc+d^2=1\end{cases}$$

از معادله‌های اول و چهارم به دست می‌آوریم $a^2=d^2$ و در نتیجه $d=\pm a$. از معادله‌های دوم و سوم معلوم است که باید بر اساس این‌که b یا c برابر صفر باشند یا نه باید سه حالت در نظر بگیریم.

حالت اول: $b=0$. در این حالت از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $a^2=1$ و در نتیجه $a=\pm 1$. حال اگر $a=d$، آن‌گاه از معادله‌ی سوم نتیجه می‌شود $c=0$ و اگر $a=-d$، آن‌گاه c دلخواه است.

حالت دوم: $c=0$. در این حالت نیز از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $a^2=1$ یعنی $a=\pm 1$. حال اگر $a=d$، آن‌گاه از معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود $b=0$ و اگر $a=-d$، آن‌گاه b دلخواه است.

حالت سوم: $b\neq 0$ و $c\neq 0$. در این حالت از معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود $d=-a$. هم‌چنین از معادله اول به دست می‌آوریم $c=b^{-1}(1-a^2)$.

بنابراین از سه حالت بالا نتیجه می‌گیریم که ماتریس A به یکی از صورت‌های زیر است

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0\\c&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&0\\c&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1&b\\0&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&b\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a&b\\b^{-1}(1-a^2)&-a\end{bmatrix}$$

۳. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$. در این صورت

(آ) $(A^\top)^\top=[a_{ji}]^\top=[a_{ij}]=A$

(ب) $(\lambda A)^\top=(\lambda[a_{ij}])^\top=([\lambda a_{ij}])^\top=[\lambda a_{ji}]=\lambda A^\top$

(پ) $(A+B)^\top=[a_{ij}+b_{ij}]^\top=[a_{ji}+b_{ji}]=[a_{ji}]+[b_{ji}]=A^\top+B^\top.$

۴. باید نشان دهیم به ازای هر $1\le i,j\le n$ درایه‌های ij دو طرف با هم مساوی هستند:

$$[(AB)^\top]_{ij}=[AB]_{ji}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{jk}[B]_{ki}=\sum_{k=1}^{n}[A^\top]_{kj}[B^\top]_{ik}=\big([B^\top][A^\top]\big)_{ij}$$

۵. با استفاده از تمرین قبل داریم

$$A^\top(A^{-۱})^\top=(AA^{-۱})^\top=I^\top=I \quad \text{و} \quad (A^{-۱})^\top A^\top=(A^{-۱}A)^\top=I^\top=I.$$

بنابراین $A^\top$ وارون پذیر است و داریم $(A^\top)^{-۱}=(A^{-۱})^\top$.

۶. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$. در این صورت

(آ) $$(A^*)^*=[\overline{a_{ji}}]^*=[\overline{\overline{a_{ij}}}]=A$$

(ب) $$(\lambda A)^*=(\lambda[a_{ij}])^*=([\lambda a_{ij}])^*=[\overline{\lambda}\overline{a_{ji}}]=\overline{\lambda}A^*$$

(پ) $$(A+B)^*=[a_{ij}+b_{ij}]^*=[\overline{a_{ji}+b_{ji}}]=[\overline{a_{ji}}]+[\overline{b_{ji}}]=A^*+B^*.$$

۷. باید نشان دهیم به ازای هر $۱\le i,j\le n$ درایه‌های ij دو طرف با هم مساوی هستند:

$$[(AB)^*]_{ij}=\overline{[AB]_{ji}}=\overline{\sum_{k=۱}^{n}[A]_{jk}[B]_{ki}}=\sum_{k=۱}^{n}\overline{[A]_{jk}}\;\overline{[B]_{ki}}=\sum_{k=۱}^{n}[A^*]_{kj}[B^*]_{ik}=([B^*][A^*])_{ij}$$

۸. فرض کنید $X=\begin{bmatrix} x_۱\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$، $Y=\begin{bmatrix} x_۱\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$ و $Z=\begin{bmatrix} z_۱\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}$. در این صورت

$$\begin{aligned}
X\cdot Y&=\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i\in F\\
Y\cdot X&=\sum_{i=۱}^{n}y_ix_i=\sum_{i=۱}^{n}y_ix_i=Y\cdot X\\
X\cdot\mathbf{0}&=\sum_{i=۱}^{n}x_i۰=۰=\sum_{i=۱}^{n}۰x_i=\mathbf{0}\cdot X\\
(\lambda X)\cdot Y&=\sum_{i=۱}^{n}(\lambda x_i)y_i=\lambda\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i=\lambda(X\cdot Y)\\
X\cdot(\lambda Y)&=\sum_{i=۱}^{n}x_i(\lambda y_i)=\lambda\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i=\lambda(X\cdot Y)\\
X\cdot(Y+Z)&=\sum_{i=۱}^{n}x_i(y_i+z_i)=\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i+\sum_{i=۱}^{n}x_iz_i)=X\cdot Y+X\cdot Z
\end{aligned}$$

۹. قرار می‌دهیم

$$B=\begin{bmatrix} ۲&۲&۲\\ ۲&۲&۲\\ ۲&۲&۲\end{bmatrix}.$$

در این صورت می‌توان ماتریس A را به صورت بلوکی $A=\begin{bmatrix} I&B\\ \mathbf{0}&B\end{bmatrix}$ نوشت. داریم

$$A^۲=\begin{bmatrix} I&B\\ \mathbf{0}&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I&B\\ \mathbf{0}&B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I&B+B^۲\\ \mathbf{0}&B^۲\end{bmatrix}$$

و

$$A^۳=AA^۲=\begin{bmatrix} I&B\\ \mathbf{0}&B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I&B+B^۲\\ \mathbf{0}&B^۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I&B+B^۲+B^۳\\ \mathbf{0}&B^۳\end{bmatrix}.$$

بنابراین به استقرا می‌توان نتیجه گرفت که

$$A^n=\begin{bmatrix} I&B+B^۲+B^۳+\cdots+B^n\\ \mathbf{0}&B^n\end{bmatrix}.$$

اکنون فرض کنید J یک ماتریس ۳×۳ باشد که همه‌ی درایه‌های آن ۱ است. بنابراین $J^۲=۳J$ و $B=۲J$ در نتیجه $B^k=۲^k۳^{k-۱}J$ و همچنین

$$\begin{aligned}
B+B^۲+B^۳+\cdots+B^n&=\sum_{k=۱}^{n}B^k=\sum_{k=۱}^{n}۲^k۳^{k-۱}J=۲\sum_{k=۰}^{n-۱}۲^k۳^kJ\\
&=\frac{۲}{۵}(۶^n-۱)J.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$A^n=\begin{bmatrix} I&\frac{۲}{۵}(۶^n-۱)J\\ \mathbf{0}&۲^n۳^{n-۱}J\end{bmatrix}.$$

۱۰. فرض کنید $B=\begin{bmatrix} a&b\\ c&d\end{bmatrix}$ یک ماتریس باشد که $AB=BA$. در این صورت

$$\begin{aligned}
AB&=\begin{bmatrix} ۱&-۱\\ ۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a&b\\ c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a&-a+b\\ c&-c+d\end{bmatrix}\\
BA&=\begin{bmatrix} a&b\\ c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱&-۱\\ ۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-c&b-d\\ c&d\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{cases} a-c=a\\ b-d=-a+b\\ d=-c+d\end{cases}$$

با حل معادله‌ی بالا خواهیم داشت $c=0$ و $a=d$ در نتیجه

$$B=\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & a\end{bmatrix}.$$

۱۱. فرض کنید E_{rs} ماتریسی باشد که درایه‌ی rs آن برابر ۱ و سایر درایه‌ها صفر باشد. بنابراین $[E_{rs}]_{ij}=\delta_{ri}\delta_{sj}$، یعنی $E_{rs}=[\delta_{ri}\delta_{sj}]$. ابتدا نشان می‌دهیم

$$E_{rs}E_{pq}=\delta_{sp}E_{rq}.$$

برای اثبات این مطلب، به ازای هر $1\le i,j\le n$ درایه‌ی ijام سمت چپ را می‌یابیم و ملاحظه می‌کنیم که برابر درایه‌ی ijام سمت راست است:

$$\begin{aligned}
[E_{rs}E_{pq}]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}[E_{rs}]_{ik}[E_{pq}]_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\delta_{ri}\delta_{sk}\delta_{pk}\delta_{qj}\\
&= \delta_{ri}\delta_{qj}\sum_{k=1}^{n}\delta_{sk}\delta_{pk}\\
&= \delta_{ri}\delta_{qj}\begin{cases}1 & s=p\\ 0 & s\neq p\end{cases}\\
&= \delta_{ri}\delta_{qj}\delta_{sp}\\
&= \delta_{sp}[E_{rq}]_{ij}.
\end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم یک ماتریس $A=[a_{ij}]\in M_n(F)$ با همه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ جابجا می‌شود اگر و تنها اگر به ازای هر $1\le r,s\le n$ داشته باشیم $AE_{rs}=E_{rs}A$. برای اثبات این مطلب ابتدا توجه می‌کنیم که اگر ماتریس A با هر ماتریس $n\times n$ جابجا شود، آن‌گاه به‌ویژه با هر کدام از ماتریس‌های E_{rs} جابجا می‌شود. برعکس نشان می‌دهیم که اگر A با هر کدام از E_{rs} ها جابجا شود، آن‌گاه با هر ماتریس $B\in M_n(F)$ جابجا می‌شود. فرض کنید $B=[b_{ij}]$. در این صورت $B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}E_{ij}$ و داریم

$$\begin{aligned}
AB &= A\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}E_{ij}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}AE_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}E_{ij}A\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}E_{ij}\right)A
\end{aligned}$$

$$= BA.$$

اکنون فرض کنید ماتریس $A=[a_{ij}]\in M_n(F)$ با همه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ جابجا شود. در بالا دیدیم این مطلب معادل این است که به ازای هر $1\le r,s\le n$ داشته باشیم $AE_{rs}=E_{rs}A$. ابتدا درایه‌ی ij ماتریس AE_{rs} را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
[AE_{rs}]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}a_{ik}[E_{rs}]_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{rk}\delta_{sj}\\
&= \delta_{sj}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{rk}\\
&= \delta_{sj}a_{ir}.
\end{aligned}$$

اکنون درایه‌ی ij ماتریس $E_{rs}A$ را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
[E_{rs}A]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}[E_{rs}]_{ik}a_{kj}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\delta_{ri}\delta_{sk}a_{kj}\\
&= \delta_{ri}\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\delta_{sk}\\
&= \delta_{ri}a_{sj}.
\end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر $1\le r,s\le n$ و به ازای هر $1\le i,j\le n$ داریم

$$\delta_{sj}a_{ir}=\delta_{ri}a_{sj}. \tag{۱}$$

به ویژه، اگر $r=s=j$ اختیار کنیم، به دست می‌آوریم

$$\delta_{jj}a_{ij}=\delta_{ji}a_{jj}.$$

بنابراین به ازای هر $i\neq j$ خواهیم داشت

$$a_{ij}=0,$$

یعنی درایه‌های غیرقطری A همگی برابر صفر هستند. حال اگر در رابطه‌ی (۱) قرار دهیم $r=i$ و $s=j$ خواهیم داشت

$$a_{ii}=a_{jj},$$

یعنی درایه‌های روی قطر A برابر هستند.

۱۲. بردار ستونی X که همه‌ی درایه‌های آن برابر ۱ است را در نظر بگیرید.

۱۳. توجه کنید که

$$A=[\delta_{i+1,j}]_{n\times n}=\begin{bmatrix}\delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} & \delta_{2,4} & \cdots & \delta_{2,n}\\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} & \delta_{3,4} & \cdots & \delta_{3,n}\\ \cdot & & \ddots & & & \cdot\\ \delta_{n,1} & \delta_{n,2} & \delta_{n,3} & \delta_{n,4} & \cdots & \delta_{n,n}\\ \delta_{n+1,1} & \delta_{n+1,2} & \delta_{n+1,3} & \delta_{n+1,4} & \cdots & \delta_{n+1,n}\end{bmatrix}.$$

ابتدا درایه‌ی ij ماتریس A^2 را می‌یابیم:

$$[A^2]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[A]_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i+1,k}\delta_{k+1,j}=\delta_{i+2,j}.$$

اکنون به استقرا روی r نشان می‌دهیم که درایه‌ی ijام ماتریس A^r برابر $\delta_{i+r,j}$ است. حالت $r=1$ همان تعریف A است و حالت $r=2$ در بالا ثابت شد. فرض کنید حکم برای $r-1$ برقرار باشد، یعنی $[A^{r-1}]_{ij}=\delta_{i+r-1,j}$ و حالت r را در نظر می‌گیریم

$$[A^r]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[A^{r-1}]_{ik}[A]_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i+r-1,k}\delta_{k+1,j}=\delta_{i+r,j}.$$

پس حکم به استقرا ثابت شد. اکنون به ازای هر $1\le i,j\le n$ داریم

$$[A^n]_{ij}=\delta_{i+n,j}=0$$

و در نتیجه $A^n=\mathbf{0}$. علاوه بر آن چون

$$[A^{n-1}]_{1n}=\delta_{1+n-1,n}=\delta_{n,n}=1$$

پس $A^{n-1}\neq\mathbf{0}$. توجه کنید $A=\sum_{i=1}^{n-1}E_{i,i+1}$، $A^2=\sum_{i=1}^{n-2}E_{i,i+2}$، و به طور کلی $A^r=\sum_{i=1}^{n-r}E_{i,i+r}$، به ویژه $A^{n-1}=E_{1,n}$ و $A^n=\mathbf{0}$. اکنون فرض کنید B یک ماتریس $n\times n$ باشد. درایه‌ی ijام ماتریس AB عبارت است از

$$[AB]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i+1,k}[B]_{kj}=\begin{cases}[B]_{i+1,j} & 1\le i\le n-1\\ 0 & i=n\end{cases}$$

و درایه‌ی ijام ماتریس BA عبارت است از

$$[BA]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[B]_{ik}[A]_{kj}=\sum_{k=1}^{n}[B]_{ik}\delta_{k+1,j}=\begin{cases}[B]_{i,j-1} & 2\le j\le n\\ 0 & j=1\end{cases}$$

بنابراین اگر $AB=BA$، آن‌گاه به ازای هر $1\le i\le n-1$ و $2\le j\le n$ داریم

$$[B]_{i,j-1}=[B]_{i+1,j}$$

اگر $i=r$ و $j=r+1$، آن‌گاه

$$[B]_{r,r}=[B]_{r+1,r+1}$$

پس روی قطر B مقدار ثابت است، بنابراین $a_0=b_{11}=b_{22}=\cdots=b_{nn}$. حال اگر $i=r$ و $j=r+2$، آن‌گاه

$$[B]_{r,r+1}=[B]_{r+1,r+2}$$

پس درایه‌های بالای قطر B مقدار ثابت است، بنابراین $a_1=b_{12}=b_{23}=\cdots=b_{n-1,n}$. حال اگر $i=r$ و $j=r+3$، آن‌گاه

$$[B]_{r,r+2}=[B]_{r+1,r+3}$$

پس $a_1=b_{13}=b_{24}=\cdots=b_{n-2,n}$. به طور کلی اگر $i=r$ و $j=r+s$، آن‌گاه

$$[B]_{r,r+s}=[B]_{r+1,r+s+1}$$

پس $a_s=b_{1,s+1}=b_{2,s+2}=\cdots=b_{n-s,n}$. اکنون داریم

$$0=[BA]_{i,1}=[AB]_{i,1}=[B]_{i+1,1},\ \ i=1,2,\ldots,n-1$$

و بنابراین به ازای هر $i=2,3,\ldots,n$ داریم $b_{i1}=0$، یعنی $b_{21}=b_{31}=\cdots=b_{n1}=0$. اکنون

$$0=b_{i1}=b_{i+1,2},\ \ i=2,3,\ldots,n-1$$

و بنابراین به ازای هر $i=3,4,\ldots,n$ داریم $b_{i2}=0$، یعنی $b_{32}=b_{42}=\cdots=b_{n2}=0$. با ادامه‌ی این روند می‌توان ثابت کرد که $b_{ij}=0$، به ازای هر $i>j$. بنابراین

$$B=\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2}\\ \cdot & & \ddots & & & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0\end{bmatrix}=a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}.$$

۱۴. چون

$$A^2=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}=9I$$

پس $A^3=9A$ و به سادگی می‌توان دید که $A^{2k}=9^kI$ و $A^{2k+1}=9^kA$.

۱۵. چون

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{bmatrix}=\frac{1}{5}A$$

پس به استقرا می‌توان دید $A^n=\frac{1}{5^{n-1}}A$.

۱۶. داریم

$$\begin{aligned} A^{۲}-(a+d)A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}-(a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{۲}+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^{۲} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a^{۲}+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^{۲} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} bc-ad & ۰ \\ ۰ & bc-ad \end{bmatrix} \\ &= -(ad-bc)I \end{aligned}$$

بنابراین $A^{۲}-(a+d)A+(ad-bc)I=\mathbf{0}$.

۱۷. با توجه به تمرین قبل داریم $A^{۲}-(۴+۰)A+(۴\times ۰-۱\times(-۳))I=\mathbf{0}$. بنابراین $A^{۲}-۴A+۳I=\mathbf{0}$، یعنی $A^{۲}=۴A-۳I$. از این‌رو فرمول ذکر شده در صورت مساله به ازای $n=۱$ و $n=۲$ برقرار است. فرض کنید فرمول ذکر شده به ازای n برقرار باشد و نشان می‌دهیم برای $n+۱$ نیز برقرار است. داریم

$$\begin{aligned} A^{n+۱}=A^nA &= \left(\frac{۳^n-۱}{۲}A+\frac{۳-۳^n}{۲}I\right)A \\ &= \frac{۳^n-۱}{۲}A^{۲}+\frac{۳-۳^n}{۲}A \\ &= \frac{۳^n-۱}{۲}(۴A-۳I)+\frac{۳-۳^n}{۲}A \\ &= ۲(۳^n-۱)A-\frac{۳^{n+۱}-۳}{۲}I+\frac{۳-۳^n}{۲}A \\ &= \frac{۴(۳^n-۱)+۳-۳^n}{۲}A-\frac{۳^{n+۱}-۳}{۲}I \\ &= \frac{۳^{n+۱}-۱}{۲}A+\frac{۳-۳^{n+۱}}{۲}I. \end{aligned}$$

بنابراین حکم به استقرا ثابت شد.

۱۸. داریم

$$AX_n=\begin{bmatrix} a & b \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-۱} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax_n+bx_{n-۱} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{n+۱} \\ x_n \end{bmatrix}=X_{n+۱}$$

اکنون اگر $a=۴$ و $b=-۳$، آن‌گاه با استفاده از تمرین ۱۷ داریم

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{۳^n-۱}{۲}A+\frac{۳-۳^n}{۲}I \\ &= \frac{۳^n-۱}{۲}\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}+\frac{۳-۳^n}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳^{n+۱}-۱ & ۳-۳^{n+۱} \\ ۳^n-۱ & ۳-۳^n \end{bmatrix}$$

از این‌رو

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{n+۱} \\ x_n \end{bmatrix} &= X_{n+۱}=A^nX_۱ \\ &= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳^{n+۱}-۱ & ۳-۳^{n+۱} \\ ۳^n-۱ & ۳-۳^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۰ \\ x_۱ \end{bmatrix} \\ &= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} (۳^{n+۱}-۱)x_۰-(۳^{n+۱}-۳)x_۱ \\ (۳^n-۱)x_۰-(۳^n-۳)x_۱ \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

حل تمرین‌های بخش ۳.۱ صفحه‌ی ۳۱

۱. (آ) با انجام اعمال سطری مقدماتی مناسب روی ماتریس ضرایب دستگاه داریم

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ -۳ & ۲ & -۱ \end{bmatrix} &\xrightarrow[۳R_۱+R_۳\to R_۳]{-۳R_۱+R_۲\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۴ & -۴ \\ ۰ & ۸ & ۸ \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[R_۳/۸\to R_۳]{-R_۲/۴\to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[-R_۲+R_۳\to R_۳]{-۲R_۲+R_۱\to R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین دستگاه هم‌ارز با دستگاه اولیه عبارت است از

$$\begin{cases} x+z=۰ \\ y+z=۰ \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (-z,-z,z) \\ &= z(-۱,-۱,۱), \end{aligned}$$

که در آن z اسکالر دلخواهی است.

(ب) با انجام اعمال سطری مقدماتی مناسب روی ماتریس ضرایب دستگاه معادله یک دستگاه هم‌ارز با آن می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۶ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} \xrightarrow[-۳R_۱+R_۳ \to R_۳]{-۲R_۱+R_۲ \to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_۳/۲ \to R_۳]{-R_۲ \to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_۲+R_۳ \to R_۳]{-R_۲+R_۱ \to R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه هم‌ارز با دستگاه اولیه عبارت است از

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \quad + x_۴ = ۰ \\ \qquad\qquad x_۳ + x_۴ = ۰ \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned} (x_۱, x_۲, x_۳, x_۴) &= (-۲x_۲ - x_۴, x_۲, -x_۴, x_۴) \\ &= x_۲(-۲, ۱, ۰, ۰) + x_۴(-۱, ۰, -۱, ۱) \end{aligned}$$

که در آن $x_۲$ و $x_۴$ اسکالرهای دلخواهی هستند.

(پ) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۵ & ۱ \\ ۱ & ۱ & -۳ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۱ & -۴ & ۳ & ۷ \end{array}\right] \xrightarrow[-۶R_۱+R_۳ \to R_۳]{-R_۱+R_۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۱ & ۵ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۴ & -۳ & ۱ \\ ۰ & -۱۱ & -۱۰ & -۲۷ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-۱۱R_۲+R_۳ \to R_۳]{۲R_۲+R_۱ \to R_۱} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۰ & -۷ & -۱ & ۳ \\ ۰ & -۱ & -۴ & -۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۳۴ & ۶ & -۱۰ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_۳/۳۴ \to R_۳]{-R_۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۰ & -۷ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۴ & ۳ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۳}{۱۷} & -\frac{۵}{۱۷} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-۴R_۳+R_۲ \to R_۲]{۷R_۳+R_۱ \to R_۱} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۴}{۱۷} & \frac{۱۶}{۱۷} \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۳۹}{۱۷} & \frac{۳}{۱۷} \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۳}{۱۷} & -\frac{۵}{۱۷} \end{array}\right]$$

دستگاه متناظر ماتریس افزوده بالا، که هم‌ارز با دستگاه اولیه است، عبارت است از

$$\begin{cases} x \qquad\quad + \frac{۴}{۱۷}u = \frac{۱۶}{۱۷} \\ \quad y \qquad + \frac{۳۹}{۱۷}u = \frac{۳}{۱۷} \\ \qquad\quad z + \frac{۳}{۱۷}u = -\frac{۵}{۱۷} \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned} (x, y, z, u) &= \left(\frac{۱۶}{۱۷} - \frac{۴}{۱۷}u, \frac{۳}{۱۷} - \frac{۳۹}{۱۷}u, -\frac{۵}{۱۷} - \frac{۳}{۱۷}u, u\right) \\ &= \frac{۱}{۱۷}(۱۶, ۳, -۵, ۰) + \frac{۱}{۱۷}u(-۴, -۳۹, -۳, ۱۷) \\ &= \frac{۱}{۱۷}(۱۶, ۳, -۵, ۰) + t(-۴, -۳۹, -۳, ۱۷), \end{aligned}$$

که در آن t اسکالر دلخواهی است.

(ت) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۳ & ۵ \\ ۳ & ۶ & ۱ & ۴ & ۷ \end{array}\right] \xrightarrow[-۳R_۱+R_۳ \to R_۳]{-۲R_۱+R_۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & -۳ & -۳ & -۳ \\ ۰ & ۰ & -۵ & -۵ & -۵ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_۳/۵ \to R_۳]{-R_۲/۳ \to R_۲} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_۲+R_۳ \to R_۳]{-۲R_۲+R_۱ \to R_۱} \left[\begin{array}{cccc|c} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

دستگاه متناظر ماتریس افزوده بالا، که هم‌ارز با دستگاه اولیه است، عبارت است از

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \quad + x_۴ = ۲ \\ \qquad\qquad x_۳ + x_۴ = ۱ \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴) = (۲ - x_۲ - x_۴, x_۲, ۱ - x_۴, x_۴)$$

$$= \quad (2,0,1,0)+x_2(-1,1,0,0)+x_4(-1,0,-1,1),$$

که در آن x_2 و x_4 اسکالرهای دلخواهی هستند.

(ث) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری–مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری–پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_1+R_3 \to R_3]{-4R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3 \to R_3]{-R_2/4 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-R_2+R_3 \to R_3 \\ -R_2+R_4 \to R_4}]{-R_2+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3/4 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_2 \to R_2]{-2R_3+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

دستگاه متناظر ماتریس افزوده بالا، که هم‌ارز با دستگاه اولیه است، عبارت است از

$$\begin{cases} w \qquad + y \qquad = -\frac{1}{2} \\ \qquad\quad y + z = \frac{7}{4} \\ \qquad\qquad\quad z = \frac{1}{4} \end{cases}$$

از این‌رو $z=\frac{1}{4}$، $y=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$، $w=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$ هم‌چنین x دلخواه است. پس جواب دستگاه عبارت است از

$$(w,x,y,z)=\left(-2,x,\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(-8,0,6,1)+x(0,1,0,0).$$

(ج) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری–مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری–پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & -8 \\ 8 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-3R_1+R_3 \to R_3 \\ -4R_1+R_4 \to R_4}]{-2R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3/2 \to R_3]{R_1/2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{3R_3+R_2 \to R_2 \\ R_3+R_4 \to R_4}]{-2R_3+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

چون معادله‌ی آخر بیان می‌کند که $8=0$ یک تناقض به دست می‌آید و بنابراین دستگاه دارای جواب نیست.

(چ) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۳ & ۲ \\ ۷ & ۴ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \xrightarrow{R_۱ \leftrightarrow R_۴} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۵ & ۳ & ۳ & ۲ \\ ۷ & ۴ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-۷R_۱ + R_۳ \to R_۳ \\ -۳R_۱ + R_۴ \to R_۴}]{-۵R_۱ + R_۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۸ & ۲ \\ ۰ & -۳ & ۱۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۴ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-R_۳/۳ \to R_۳ \\ -R_۴ \to R_۴}]{-R_۲/۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۴ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۴ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۴ & -۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-R_۲ + R_۳ \to R_۳ \\ -R_۲ + R_۴ \to R_۴}]{-R_۲ + R_۱ \to R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & -۴ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

دستگاه متناظر ماتریس افزوده بالا، که هم‌ارز با دستگاه اولیه است، عبارت است از

$$\begin{cases} x \quad + ۳z = ۱ \\ \quad y - ۴z = -۱ \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (۱ - ۳z, -۱ + ۴z, z) \\ &= (۱, -۱, ۰) + z(-۳, ۴, ۱), \end{aligned}$$

که در آن z اسکالر دلخواهی است.

(ح) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۲ & ۴ & ۶ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۳ \\ ۲ & ۴ & ۰ & ۸ \end{array}\right] \xrightarrow{R_۱/۲ \to R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۳ \\ ۲ & ۴ & ۰ & ۸ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-R_۱ + R_۳ \to R_۳ \\ -۲R_۱ + R_۴ \to R_۴}]{-R_۱ + R_۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۲ & -۲ & -۴ \\ ۰ & ۰ & -۶ & ۶ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-R_۳/۲ \to R_۳ \\ -R_۴/۶ \to R_۴}]{-R_۲/۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_۲ \leftrightarrow R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-۲R_۲ + R_۱ \to R_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \end{array}\right]$$

چون معادله‌ی سوم بیان می‌کند که $۰ = ۱$ یک تناقض به دست می‌آید و بنابراین دستگاه دارای جواب نیست.

(خ) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۴ & ۴ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۴ & ۴ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۸ & ۶ & ۵ & ۳ \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-۲R_۱ + R_۳ \to R_۳ \\ -۳R_۱ + R_۴ \to R_۴}]{-۲R_۱ + R_۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccccc|c} ۱ & ۱ & ۲ & ۲ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۰ & ۲ & ۰ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_۲/۲ + R_۱ \to R_۱]{-R_۲ + R_۴ \to R_۴} \left[\begin{array}{ccccc|c} ۱ & ۰ & ۲ & ۲ & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۰ & ۱ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_۴/۲ \to R_۴ \\ R_۳ \leftrightarrow R_۴}]{R_۲/۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccccc|c} ۱ & ۰ & ۲ & ۲ & \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_3+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

دستگاه متناظر ماتریس افزوده بالا، که هم‌ارز با دستگاه اولیه است، عبارت است از

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2} \\ x_2 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= \left(\frac{1}{2} - 2x_4 + \frac{1}{2}x_5, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5, x_4, x_5\right) \\ &= \frac{1}{2}(1,1,1,0,0) + x_4(-2,0,0,1,0) + \frac{1}{2}x_5(1,-1,-1,0,1),\end{aligned}$$

که در آن x_4 و x_5 اسکالرهای دلخواهی هستند.

۲. (آ) با انجام اعمال سطری مقدماتی مناسب روی ماتریس ضرایب دستگاه معادله یک دستگاه هم‌ارز با آن می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-4R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{-R_3/2\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[7R_2+R_3\to R_3]{-2R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3/18\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-4R_3+R_2\to R_2]{5R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه هم‌ارز با دستگاه اولیه عبارت است از

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{9}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{9}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{11}{9}x_4 = 0 \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \left(-\frac{1}{9}x_4, -\frac{1}{9}x_4, -\frac{11}{9}x_4, x_4\right) \\ &= -\frac{1}{9}x_4(1,1,11,0) \\ &= t(1,1,11,0)\end{aligned}$$

که در آن t اسکالر دلخواهی است.

(ب) با انجام اعمال سطری مقدماتی مناسب روی ماتریس ضرایب دستگاه معادله یک دستگاه هم‌ارز با آن می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4\to R_1+R_4\to R_4 \\ R_5\to -3R_1+R_5\to R_5}]{\substack{-2R_1+R_2\to R_2 \\ -R_1+R_3\to R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+R_5\to R_5]{-R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5R_2+R_3\to R_3]{-2R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه هم‌ارز با دستگاه اولیه عبارت است از

$$\begin{cases} x_۱ \qquad + x_۳ = ۰ \\ \qquad x_۲ + x_۳ = ۰ \\ \qquad\qquad ۲x_۳ = ۰ \end{cases}$$

از این‌رو دستگاه فقط جواب بدیهی $x_۱ = x_۲ = x_۳ = ۰$ دارد.

(پ) با انجام اعمال سطری مقدماتی مناسب روی ماتریس ضرایب دستگاه معادله یک دستگاه هم‌ارز با آن می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۰ & ۴ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۰ & ۴ & ۷ \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-R_۱ + R_۳ \to R_۳ \\ -۲R_۱ + R_۴ \to R_۴}]{-۲R_۱ + R_۲ \to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۰ & -۲ & -۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۲ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_۲ + R_۳ \to R_۳ \\ -R_۲ + R_۴ \to R_۴}]{R_۲/۲ + R_۱ \to R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & -۲ & -۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_۳ \leftrightarrow R_۴]{-R_۲/۲ \to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه هم‌ارز با دستگاه اولیه عبارت است از

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \qquad + ۲x_۴ + x_۵ = ۰ \\ \qquad x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۰ \\ \qquad\qquad ۳x_۵ = ۰ \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned} (x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) &= (-۲x_۲ - ۲x_۴, x_۲, -x_۴, x_۴, ۰) \\ &= x_۲(-۲, ۱, ۰, ۰, ۰) + x_۴(-۲, ۰, -۱, ۱, ۰) \end{aligned}$$

که در آن $x_۲$ و $x_۴$ اسکالرهای دلخواهی هستند.

(ت) با انجام اعمال سطری مقدماتی مناسب روی ماتریس ضرایب دستگاه معادله یک دستگاه هم‌ارز با آن می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۴ & ۶ & ۲ \\ ۳ & ۶ & ۶ & ۹ & ۶ \\ ۱ & ۲ & ۴ & ۵ & ۳ \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-۳R_۱ + R_۳ \to R_۳ \\ -R_۱ + R_۴ \to R_۴}]{-۲R_۱ + R_۲ \to R_۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_۴/۲ \to R_۴]{R_۳/۳ \to R_۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۲ \leftrightarrow R_۴} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-۲R_۲ + R_۱ \to R_۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه هم‌ارز با دستگاه اولیه عبارت است از

$$\begin{cases} x_۱ + ۲x_۲ \qquad + x_۴ - x_۵ = ۰ \\ \qquad x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۰ \\ \qquad\qquad x_۵ = ۰ \end{cases}$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned} (x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵) &= (-۲x_۲ - x_۴, x_۲, -x_۴, x_۴, ۰) \\ &= x_۲(-۲, ۱, ۰, ۰, ۰) + x_۴(-۱, ۰, -۱, ۱, ۰) \end{aligned}$$

که در آن $x_۲$ و $x_۴$ اسکالرهای دلخواهی هستند. **۳.** ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} ۰ & ۰ & ۶ & ۲ & -۴ & -۸ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & -۲ & -۴ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۱ & ۴ & -۷ & ۱ & ۲ \\ ۶ & -۹ & ۰ & ۱۱ & -۱۹ & ۳ & ۱ \end{array}\right] \xrightarrow{-۳R_۳ + R_۴ \to R_۴}$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\
0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\
2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -5
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\
0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\
0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -5
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{R_2 + R_4 \to R_4 \\ -R_2/3 + R_1 \to R_1}]{-2R_2 + R_3 \to R_3}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
2 & -3 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\
0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
2 & -3 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\
0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{-R_3 + R_2 \to R_2}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
2 & -3 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{19}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\
0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{R_2/3 \to R_2 \\ -R_3/4 \to R_3}]{R_1/2 \to R_1}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{11}{6} & -\frac{19}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{-7R_3/6 + R_1 \to R_1}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{11}{6} & -\frac{19}{6} & 0 & \frac{1}{24} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

بنابراین دستگاه هم‌ارز با دستگاه اولیه عبارت است از

$$
\begin{cases}
x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{11}{6}x_4 - \frac{19}{6}x_5 = \frac{1}{24} \\
x_3 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 = \frac{5}{3} \\
x_6 = \frac{1}{4}
\end{cases}
$$

از این‌رو جواب دستگاه عبارت است از

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \frac{1}{24} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{11}{6}x_4 + \frac{19}{6}x_5 \\ x_2 \\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{1}{24} \\ 0 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}
+ \frac{3}{2}x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
- \frac{1}{6}x_4 \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
+ \frac{1}{6}x_5 \begin{bmatrix} 19 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

که در آن x_2 و x_4 اسکالرهای دلخواهی هستند.

۴. (آ) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
2 & 2 & 3 & a \\
4 & 8 & 12 & -4 \\
6 & 2 & -b & 4
\end{array}\right]
\xrightarrow[-3R_1 + R_3 \to R_3]{-2R_1 + R_2 \to R_2}
\left[\begin{array}{ccc|c}
2 & 2 & 3 & a \\
0 & 4 & 6 & -4 - 2a \\
0 & -4 & -9 - b & 4 - 3a
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[-R_2/2 + R_1 \to R_1]{R_2 + R_3 \to R_3}
\left[\begin{array}{ccc|c}
2 & 0 & 0 & 2 + 2a \\
0 & 4 & 6 & -4 - 2a \\
0 & 0 & -3 - b & -5a
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[-R_3 \to R_3]{\substack{R_1/2 \to R_1 \\ R_2/4 \to R_2}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 + a \\
0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 - \frac{1}{2}a \\
0 & 0 & 3 + b & 5a
\end{array}\right]
$$

دستگاه متناظر ماتریس افزوده بالا، که هم‌ارز با دستگاه اولیه است، عبارت است از

$$\begin{cases} x = ۱ + a \\ y + \frac{۳}{۲}z = -۱ - \frac{۱}{۲}a \\ (۳ + b)z = ۵a. \end{cases}$$

فرض کنید $b = -۳$. اگر $a \neq ۰$، آن‌گاه با توجه به معادله‌ی سوم دستگاه دارای جواب نیست. بنابراین $a = ۰$ و در این حالت جواب دستگاه عبارت است از

$$(x, y, z) = \left(۱, \frac{۳}{۲}z, z\right) = (۱, ۰, ۰) + \frac{۱}{۲}z(۰, ۳, ۲)$$

که در آن z دلخواه است. اکنون فرض کنید $b \neq -۳$. در این حالت از معادله‌ی سوم داریم $z = \frac{۵a}{۳ + b}$ و با قرار دادن در معادله‌ی دوم داریم

$$y = -۱ - \frac{۱}{۲}a - \frac{۳}{۲}z = -۱ - \frac{۱}{۲}a - \frac{۱۵a}{۲(۳ + b)}$$

و بنابراین جواب دستگاه عبارت است از

$$(x, y, z) = \left(۱ + a, -۱ - \frac{۱}{۲}a - \frac{۱۵a}{۲(۳ + b)}, \frac{۵a}{۳ + b}\right).$$

(ب) ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & a & ۵ \\ ۳ & -۴ & ۵ & b \end{array}\right] \xrightarrow[-۳R_۱ + R_۳ \to R_۳]{-۲R_۱ + R_۲ \to R_۲} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & -۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۱ & -۶ + a & -۳ \\ ۰ & ۲ & -۴ & -۱۲ + b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[۲R_۲ + R_۱ \to R_۱]{-۲R_۲ + R_۳ \to R_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & -۹ + ۲a & -۲ \\ ۰ & ۱ & -۶ + a & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۸ - ۲a & -۶ + b \end{array}\right]$$

دستگاه متناظر ماتریس افزوده بالا، که هم‌ارز با دستگاه اولیه است، عبارت است از

$$\begin{cases} x + (۲a - ۹)z = -۲ \\ y + (a - ۶)z = -۳ \\ (۸ - ۲a)z = -۶ + b. \end{cases}$$

فرض کنید $a = ۴$. اگر $b \neq ۶$، آن‌گاه با توجه به معادله‌ی سوم دستگاه دارای جواب نیست بنابراین $b = ۶$ و در این حالت جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-۲ - (۲a - ۹)z, -۳ - (a - ۶)z, z) \\ &= (-۲, -۳, ۰) + z(۲a - ۹), a - ۶, ۱), \end{aligned}$$

که در آن z دلخواه است. اکنون فرض کنید $a \neq ۴$. در این حالت از معادله‌ی سوم داریم $z = \frac{b - ۶}{۸ - ۲a}$ و با قرار دادن در معادله‌های اوال و دوم داریم

$$x = -۲ - (۲a - ۹)z = -۲ - (۲a - ۹)\frac{۶ + b}{۸ - ۲a}$$
$$y = -۳ - (a - ۶)z = -۱ - (a - ۶)\frac{۶ + b}{۸ - ۲a}$$

و بنابراین جواب دستگاه عبارت است از

$$(x, y, z) = \left(-۲ - (۲a - ۹)\frac{۶ + b}{۸ - ۲a}, -۱ - (a - ۶)\frac{۶ + b}{۸ - ۲a}, \frac{۶ + b}{۸ - ۲a}\right)$$

حل تمرین‌های بخش ۴.۱ صفحه‌ی ۴۱

۱. فرض کنید $A \in M_n(F)$ یک ماتریس با دو وارون B و C باشد. در این صورت

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

۲. چون

$$(AB)(B^{-۱}A^{-۱}) = ABB^{-۱}A^{-۱} = AIA^{-۱} = AA^{-۱} = I$$
$$(B^{-۱}A^{-۱})(AB) = B^{-۱}A^{-۱}AB = BIB^{-۱} = BB^{-۱} = I$$

پس AB دارای وارون $B^{-۱}A^{-۱}$ است. اگر $A_۱, \ldots, A_k \in M_n(F)$ ماتریس‌های وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه $A_۱ \cdots A_k$ وارون‌پذیر است و

$$(A_۱ \cdots A_k)^{-۱} = A_k^{-۱}A_{k-۱}^{-۱} \cdots A_۱^{-۱}.$$

۳. چون

$$(A^*)(A^{-۱})^* = (AA^{-۱})^* = I^* = I \quad \text{و} \quad (A^{-۱})^*(A^*) = (A^{-۱}A)^* = I^* = I$$

پس $(A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*$.

۴. فرض کنید Y جوابی از دستگاه همگن $AX = \mathbf{0}$ باشد. در این صورت $A(Y + X_۰) = AY + AX_۰ = \mathbf{0} + B = B$ و بنابراین $Y + X_۰$ جوابی از دستگاه $AX = B$ است. اکنون فرض کنید Z یک جواب دلخواه از دستگاه $AX = B$ باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $Y = Z - X_۰$ و داریم $AY = A(Z - X_۰) = AX - AX_۰ = B - B = \mathbf{0}$ و در نتیجه Y جوابی از دستگاه همگن $AX = \mathbf{0}$ است و $Z = Y + X_۰$.

۵. ($\Longrightarrow$) فرض کنید A وارون‌پذیر باشد. با فرض $X = A^{-۱}B$ داریم

$$AX = A(A^{-۱}B) = (AA^{-۱})B = IB = B$$

و در نتیجه $X = A^{-۱}B$ در دستگاه $AX = B$ صدق می‌کند. اکنون فرض کنید X جوابی از دستگاه $AX = B$ باشد. با ضرب $A^{-۱}$ در تساوی اخیر داریم $A^{-۱}(AX) = A^{-۱}B$ و در نتیجه $(A^{-۱}A)X = A^{-۱}B$. چون $A^{-۱}A = I$ داریم $X = A^{-۱}B$.

$(\Longleftarrow)$ فرض کنید دستگاه $AX = B$ دارای جواب منحصر بفرد X_0 باشد. فرض کنید Y جوابی از معادله‌ی همگن $AX = \mathbf{0}$ باشد. در این صورت طبق تمرین قبل $X_0 + Y$ جوابی از دستگاه $AX = B$ است. چون X_0 جواب یکتای $AX = B$ است، داریم $X_0 + Y = X_0$. در نتیجه $Y = \mathbf{0}$. از این‌رو دستگاه $AX = \mathbf{0}$ دارای جواب یکتا است. پس طبق قضیه‌ی ۱.۱۷، A وارون‌پذیر است.

۶. با توجه به حاصل‌ضرب زیر حکم مساله واضح است

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

۷. اگر $A = \lambda I$، که در آن $\lambda \neq 0$، آن‌گاه A وارون‌پذیر است و $A^{-1} = (\lambda I)^{-1} = \lambda^{-1} I$، زیرا $(\lambda I)(\lambda^{-1} I) = I$ و $I = (\lambda\lambda^{-1})I$. برعکس اگر A وارون‌پذیر باشد و $A^2 = \lambda A$، آن‌گاه $A^{-1}A^2 = A^{-1}(\lambda A)$، و در نتیجه $A = \lambda I$.

۸. (آ) ماتریس همانی 3×3 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) ماتریس A را به ماتریس پلکانی تبدیل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1 + R_3 \to R_3]{R_1 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2/4 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[5R_2 + R_3 \to R_3]{-2R_2 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & 6 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_3/13 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{13} & \frac{1}{26} & \frac{5}{26} & \frac{2}{13} \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_3/2 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{13} & \frac{5}{26} & -\frac{1}{26} & -\frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{13} & \frac{1}{26} & \frac{5}{26} & \frac{2}{13} \end{array}\right]$$

بنابراین ماتریس تحویل‌یافته‌ی پلکانی هم‌ارز سطری A و ماتریس وارون‌پذیر P که $PA = R$ عبارتند از

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{13} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{26} & -\frac{1}{26} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{26} & \frac{5}{26} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}.$$

(ب) ماتریس همانی 3×3 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) ماتریس A را به ماتریس پلکانی تبدیل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & i & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & i & 0 & 1 & 0 \\ i & 2 & -2 & -i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-IR_1 + R_3 \to R_3]{-2R_1 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & i & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3-2i & 1 & -2+i & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2i & -i & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_3/3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & i & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2i}{3} & -\frac{i}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -3-2i & 1 & -2+i & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(3+2I)R_2 + R_3 \to R_3]{-IR_2 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2i}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{i}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2i}{3} & -\frac{i}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1-\frac{4i}{3} & -\frac{2}{3}-i & -\frac{4}{3}-i & 1 & 1+\frac{2i}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3/(1+4I/3) \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2i}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{i}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2i}{3} & -\frac{i}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{25}+\frac{i}{25} & \frac{24}{25}-\frac{7i}{25} & -\frac{9}{25}+\frac{12i}{25} & -\frac{17}{25}+\frac{6i}{25} \end{array}\right] \xrightarrow[2R_3/3 + R_2 \to R_2]{-2I\,R_3/3 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{25}-\frac{12i}{25} & \frac{12}{25}-\frac{16i}{25} & \frac{8}{25}+\frac{6i}{25} & \frac{4}{25}+\frac{3i}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{25}-\frac{16i}{25} & \frac{16}{25}-\frac{13i}{25} & -\frac{6}{25}+\frac{8i}{25} & -\frac{3}{25}+\frac{4i}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{25}+\frac{i}{25} & \frac{24}{25}-\frac{7i}{25} & -\frac{9}{25}+\frac{12i}{25} & -\frac{17}{25}+\frac{6i}{25} \end{array}\right]$$

بنابراین ماتریس تحویل‌یافته‌ی پلکانی هم‌ارز سطری A و ماتریس وارون‌پذیر P که $PA = R$ عبارتند از

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{25}-\frac{12i}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{25}-\frac{16i}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{25}+\frac{i}{25} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{12}{25}-\frac{16i}{25} & \frac{8}{25}+\frac{6i}{25} & \frac{4}{25}+\frac{3i}{25} \\ \frac{16}{25}-\frac{13i}{25} & -\frac{6}{25}+\frac{8i}{25} & -\frac{3}{25}+\frac{4i}{25} \\ \frac{24}{25}-\frac{7i}{25} & -\frac{9}{25}+\frac{12i}{25} & -\frac{17}{25}+\frac{6i}{25} \end{bmatrix}$$

(پ) ماتریس همانی 3×3 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) ماتریس A را به ماتریس پلکانی تبدیل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{-2R_1+R_2 \to R_2}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{4R_2+R_1 \to R_1 \\ -R_2 \to R_2}]{2R_2+R_3 \to R_3}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

بنابراین ماتریس تحویل‌یافته‌ی پلکانی هم‌ارز سطری A و ماتریس وارون‌پذیر P که $PA = R$ عبارتند از

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(پ) ماتریس همانی 3×3 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) ماتریس A را به ماتریس پلکانی تبدیل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2 \to R_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-4R_2+R_3 \to R_3]{-2R_2+R_1 \to R_1}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 6 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3/3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[R_3+R_2 \to R_2]{-2R_3+R_1 \to R_1}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right]$$

بنابراین ماتریس تحویل‌یافته‌ی پلکانی هم‌ارز سطری A و ماتریس وارون‌پذیر P که $PA = R$ عبارتند از

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

۹. با استفاده از ضرب ماتریس‌های بلوکی داریم

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & BB^{-1} \end{bmatrix} = I$$

و هم‌چنین

$$\begin{bmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} + C\mathbf{0} & A(-A^{-1}CB^{-1}) + CB^{-1} \\ \mathbf{0}A^{-1} + B\mathbf{0} & \mathbf{0}(-A^{-1}CB^{-1}) + BB^{-1} \end{bmatrix} = I$$

بنابراین با استفاده از نتیجه‌ی ۱۸.۱ از صفحه‌ی ۴۱ احکام خواسته شده واضح هستند.

۱۰. فرض کنید A وارون ماتریس $I + U$ باشد، یعنی $(I+U)A = I$. بنابراین $A + UA = I$ و داریم

$$(I+U)A = I \Longrightarrow A + UA = I \Longrightarrow UA + U^2A = U \Longrightarrow I - A + A = U \Longrightarrow I = U.$$

۱۱. داریم

$$AB = I \Longrightarrow C(AB) = C \Longrightarrow (CA)B = C \Longrightarrow IB = C \Longrightarrow B = C$$

بنابراین $B = C$ و در نتیجه $AB = BA = I$، یعنی $B = A^{-1}$.

۱۲. (آ) اگر P ماتریس خودتوان وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم

$$P^2 = P \Longrightarrow P^{-1}P^2 = P^{-1}P \Longrightarrow P = I.$$

(ب) فرض کنید P خوددتوان باشد. در این صورت

$$(I - 2P)(I - 2P) = I - 2P - 2P + 4P^2 = I - 4P + 4P = I$$

و در نتیجه $I-2P$ وارون‌پذیر است و وارون آن $I-2P$ است. بر عکس فرض کنید $I-2P$ وارون‌پذیر باشد و وارون آن $I-2P$ باشد، پس

$$I=(I-2P)(I-2P)=I-2P-2P+4P^2=I-4P+4P^2$$

و در نتیجه $-4P+4P^2=0$، یعنی $P^2=P$.

(پ) فرض کنید ماتریس U وارون خودش باشد. پس $U^2=I$. قرار می‌دهیم $P=\frac{1}{2}(I-U)$ در این صورت $U=I-2P$ و $P^2=P$، زیرا

$$\begin{aligned}P^2 &= \frac{1}{4}(I-U)(I-U)\\ &= \frac{1}{4}(I-U-U+U^2)\\ &= \frac{1}{4}(I-2U+I)\\ &= \frac{1}{2}(I-U)=P.\end{aligned}$$

برعکس اگر P ماتریس خودتوان باشد، آن‌گاه طبق قسمت (ب) ماتریس $U=I-2P$ وارون خودش است.

(ت) فرض کنید P خودتوان باشد. داریم

$$\begin{aligned}(I-aP)(I-\frac{a}{a-1}P) &= I-\frac{a}{a-1}P-aP+\frac{a^2}{a-1}P^2\\ &= I-\frac{a}{a-1}P-aP+\frac{a^2}{a-1}P\\ &= I-aP+\frac{a^2-a}{a-1}P\\ &= I-aP+aP\\ &= I.\end{aligned}$$

بنابراین ماتریس $I-aP$ وارون‌پذیر است و

$$(I-aP)^{-1}=I-\frac{a}{a-1}P.$$

۱۳. (آ) ماتریس همانی 3×3 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) سعی می‌کنیم A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\1&-3&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&-5&-1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&2&-1&0\\0&-5&-1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[5R_2+R_3\to R_3]{-2R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-3&2&0\\0&1&2&2&-1&0\\0&0&9&9&-5&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3/9\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-3&2&0\\0&1&2&2&-1&0\\0&0&1&1&-\frac{5}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_3+R_2\to R_2]{R_3+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&\frac{13}{9}&\frac{1}{9}\\0&1&0&0&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\0&0&1&1&-\frac{5}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right]$$

بنابراین وارون ماتریس A عبارت است از

$$\begin{bmatrix}-2&\frac{13}{9}&\frac{1}{9}\\0&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\1&-\frac{5}{9}&\frac{1}{9}\end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&5&-1&1&0&0\\4&-1&2&0&1&0\\6&4&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[-3R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&5&-1&1&0&0\\0&-11&4&-2&1&0\\0&-11&4&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&5&-1&1&0&0\\0&-11&4&-2&1&0\\0&0&0&-1&-1&1\end{array}\right]$$

چون یک سطر صورت پلکانی A برابر صفر شد پس A وارون‌پذیر نیست.

(پ) ماتریس همانی 3×3 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) سعی می‌کنیم A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\3&2&4&0&1&0\\0&1&-2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-3R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&5&-2&-3&1&0\\0&1&-2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&2&1&0&0\\0&1&-2&0&0&1\\0&5&-2&-3&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-5R_2+R_3\to R_3]{R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3/8\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_3+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right]$$

بنابراین وارون ماتریس A عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}.$$

(ت) ماتریس همانی 3×3 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) سعی می‌کنیم A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_2+R_3\to R_3]{-R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

بنابراین وارون ماتریس A عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ث) ماتریس همانی 3×3 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام

می‌شوند) سعی می‌کنیم A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow[-7R_1+R_3\to R_3]{-5R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{-R_3/6\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -6 & -9 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[6R_2+R_3\to R_3]{-2R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3/3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{7}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3+R_1\to R_1]{-2R_3+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

بنابراین وارون ماتریس A عبارت است از

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(ج) قرار می‌دهیم $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. در این صورت $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ و هم‌چنین $B^{-1}=-\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. بنابراین

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ 0 & 0 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} \end{bmatrix}$$

(چ) ماتریس همانی 4×4 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام

می‌شوند) سعی می‌کنیم A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2/2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_2 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3/3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_3/2 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4/4}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_4/3 + R_3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

بنابراین وارون ماتریس A عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(ح) ماتریس همانی 4×4 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) سعی می‌کنیم A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-R_1 + R_3 \to R_3 \\ -R_1 + R_4 \to R_4}]{-R_1 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-R_2 + R_3 \to R_3 \\ -R_2 + R_4 \to R_4}]{-R_2 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_3 + R_4 \to R_4]{-R_3 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_4 + R_3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

بنابراین وارون ماتریس A عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(د) ماتریس همانی 4×4 را کنار ماتریس A قرار می‌دهیم و با انجام اعمال سطری-مقدماتی (که به طور همزمان روی ماتریس همانی انجام می‌شوند) سعی می‌کنیم A را به ماتریس همانی تبدیل کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2/6 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3/3 \to R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-R_3/3 + R_2 \to R_2 \\ -3R_3 + R_4 \to R_4}]{-4R_3/3 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{35}{18} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{18} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4/5}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{35}{18} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{18} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{7R_4/18 + R_2 \to R_2 \\ R_4/3 + R_3 \to R_3}]{-35R_4/18 + R_1 \to R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & -\frac{7}{18} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{17}{90} & \frac{7}{90} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

بنابراین وارون ماتریس A عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & -\frac{7}{18} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{17}{90} & \frac{7}{90} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{15} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

۱۴. (آ) فرض کنید U وارون ماتریس AB باشد. در این صورت

$$(AB)U = I \Longrightarrow A^{-1}(AB)U = A^{-1} \Longrightarrow BU = A^{-1} \Longrightarrow B(UA) = I.$$

بنابراین طبق نتیجه‌ی ۱۸.۱ داریم $(UA)B = I$، یعنی ماتریس B وارون‌پذیر است و $B^{-1} = UA$.

(ب) فرض کنید U وارون ماتریس AB باشد. در این صورت $I = U(AB) = (UA)B$ و بنابراین طبق نتیجه‌ی ؟؟ داریم $(UA)B = I$، یعنی ماتریس B وارون‌پذیر است و $B^{-1} = UA$ هم‌چنین داریم این صورت $I = (AB)U = A(BU)$ و بنابراین طبق نتیجه‌ی ؟؟ داریم $(BU)A = I$، یعنی ماتریس A وارون‌پذیر است و $A^{-1} = BU$.

(ب) فرض کنید U وارون ماتریس ABC باشد. در این صورت چون A و C وارون

$$(ABC)U = I \Longrightarrow A^{-1}(ABC)U = A^{-1} \Longrightarrow BCU = A^{-1} \Longrightarrow B(CUA) = I.$$

بنابراین طبق نتیجه‌ی ۱۸.۱ داریم $(CUA)B = I$، یعنی ماتریس B وارون‌پذیر است و $B^{-1} = CUA$.

۱۵. (آ) چون $I = I - A^2 = I^2 + IA - AI - A^2 = (I - A)(I + A)$، پس $I - A$ و ارون‌پذیر است و $(I - A)^{-1} = I + A$.

(ب) چون $I = I - A^3 = (I - A)(I + A + A^2)$، پس $I - A$ و ارون‌پذیر است و $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

(پ) چون $I = I - A^k = (I - A)(I + A + \cdots + A^{k-1})$، پس $I - A$ و ارون‌پذیر است و $(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{k-1}$.
بنابراین ماتریس $I + A = I - (-A)$ نیز وارون‌پذیر است و $(I + A)^{-1} = I + (-A) + (-A)^2 + \cdots + (-A)^{k-1}$.

(ت) می‌توان نوشت

$$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{k-1} A^{k-1} = a_0(I + b_1 A + \cdots + b_{k-1} A^{k-1}) = a_0(I + B)$$

که در آن

$$B = b_1 A + \cdots + b_{k-1} A^{k-1} = A(b_1 I + \cdots + b_{k-1} A^{k-2}), \quad b_i = a_0^{-1} a_i.$$

چون $A^k = \mathbf{0}$، پس $B^k = \mathbf{0}$، و بنابراین با استفاده از (پ) حکم به دست می‌آید.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

حل برخی از تمرین‌ها، ویرایش اول (ممکن است ایراد وجود داشته باشد)

(حل تمرین‌های فصل ۲)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

حل تمرین‌های بخش ۱.۲ صفحه‌ی ۶۵

۱. فرض کنید $A=(a,b,c)$، $P=(p,q,r)$ و $X=(x,y,z)$. در این صورت چون طبق فرض $\det(A,P,X)=-1$، با استفاده از خواص دترمینان داریم

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 3r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} &= \det(-2A, 2P+X, 3X) \\
&= \det(-2A,2P,3X)+\det(-2A,X,3X) \\
&= -12\det(A,P,X)+0 \\
&= 12.
\end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -x & -y & -z \\ 3p+a & 3q+b & 3r+c \\ 2p & 2q & 2r \end{vmatrix} &= \det(-X, 3P+A, 2P) \\
&= \det(-X,3P,2X)+\det(-X,A,2P) \\
&= 0-2\det(X,A,P) \\
&= 2\det(P,A,X) \\
&= -2\det(A,P,X) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

۲. فرض کنید $A=(a,b,c)$، $P=(p,q,r)$ و $X=(x,y,z)$. در این صورت با استفاده از خواص دترمینان داریم

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} p+x & q+y & r+z \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} &= \det(P+X, A+X, A+P) \\
&= \det(P,X,A)+\det(X,A,P) \\
&= -\det(P,A,X)-\det(A,X,P) \\
&= \det(A,P,X)+\det(A,P,X) \\
&= 2\det(A,P,X) \\
&= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

۳. با ضرب ستون دوم در -1 و اضافه کردن آن به ستون‌های سوم و چهارم و با استفاده از بسط لاپلاس بر حسب سطر اول داریم

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & -x & 0 \\ 1 & x & 0 & -x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & 0 & x \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} \\
&= -(-1)^{1+2}x\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & -x \end{vmatrix} \\
&= -3x^2.
\end{aligned}$$

۴. با استفاده از بسط لاپلاس بر حسب سطر اول داریم

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} -a & c \\ -b & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -a & 1 \\ -b & -c \end{vmatrix} \\
&= 1+c^2-a(-a+bc)+b(ac+b) \\
&= 1+c^2+a^2-abc+bac+b^2 \\
&= 1+a^2+b^2+c^2.
\end{aligned}$$

۵. با ضرب سطر اول در $-a$ و اضافه کردن آن به سطرهای دوم و چهارم و ضرب سطر اول در $-b$ و اضافه کردن آن به سطر سوم ، و استفاده از خواص دترمینان داریم

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a & 1 & x & x^2 \\ b & b & 1 & x \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1-ax & x-ax^2 & x^2-ax^3 \\ 0 & b-bx & 1-bx^2 & x-bx^3 \\ 0 & b-ax & c-ax^2 & 1-ax^3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-ax & x-ax^2 & x^2-ax^3 \\ b-bx & 1-bx^2 & x-bx^3 \\ b-ax & c-ax^2 & 1-ax^3 \end{vmatrix} \\
&= (1-ax)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ b-bx & 1-bx^2 & x-bx^3 \\ b-ax & c-ax^2 & 1-ax^3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} (-b+bx)[\text{سطر ۱}]+[\text{سطر ۲}] \\ (-b+ax)[\text{سطر ۱}]+[\text{سطر ۳}] \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-ax)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1-bx & x-bx^2 \\ 0 & c-bx & 1-bx^2 \end{vmatrix} \\
&= (1-ax)\begin{vmatrix} 1-bx & x-bx^2 \\ c-bx^2 & 1-bx^2 \end{vmatrix} \\
&= (1-ax)(1-bx)\begin{vmatrix} 1 & x \\ c-bx & 1-bx^2 \end{vmatrix} \\
&= (1-ax)(1-bx)(1-cx).
\end{aligned}$$

۶. فرض کنید A ماتریس داده شده در صورت مساله باشد. با استفاده از بسط لاپلاس نسبت به ستون اول داریم

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{1+1}\times 1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}\times 1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^2(1)^{n-1} + (-1)^{n+1}(1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

توجه کنید در عبارت بالا ماتریس اول بالا مثلثی و ماتریس دوم پایین مثلثی است و در هر کدام دترمینان برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطری است.

۷. ابتدا توجه می‌کنیم که $c \neq 0$. اکنون با استفاده از اعمال مقدماتی و بسط دترمینان

$$\begin{vmatrix} 0 & c & c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{vmatrix} \xrightarrow{cR_2+R_3\to R_3} \begin{vmatrix} 0 & c & c \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}c\begin{vmatrix} 0 & c \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -c^2$$

بنابراین ماتریس داده شده وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $c \neq 0$.

۸. چون $AB=-BA$ داریم $\det(AB)=\det(-BA)$ و در نتیجه

$$\det(A)\det(B) = (-1)^n\det(B)\det(A).$$

چون n فرد است نتیجه می‌گیریم $\det(A)\det(B) = -\det(A)\det(B)$ و بنابراین $2\det(A)\det(B)=0$ پس $\det(A)=0$ یا $\det(B)=0$. از این‌رو A یا B وارون‌پذیر نیست.

۹. برای (آ) داریم

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7} \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$$

برای (ب) داریم

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-21}{-7} = 3 \quad \text{و} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-7} \quad \text{و} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{9}{-7}$$

۱۰. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\begin{bmatrix} & & & a_1 \\ & \mathbf{0} & a_2 & \\ & \iddots & & * \\ a_n & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & \mathbf{0} & 1 & \\ & \iddots & & \mathbf{0} \\ 1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}.$$

بنابراین

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & \mathbf{0} & a_2 & \\ & \iddots & & * \\ a_n & & & \end{vmatrix}\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & \mathbf{0} & 1 & \\ & \iddots & & \mathbf{0} \\ 1 & & & \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n.$$

اگر e_i سطر iام ماتریس همانی باشد، آن‌گاه تعداد جابجایی‌های مورد نیاز برای این‌که ماتریس $\begin{bmatrix} e_n \\ \vdots \\ e_1 \end{bmatrix}$ به ماتریس همانی، یعنی $\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$ تبدیل شود برابر $\frac{n}{2}$ است، هرگاه n زوج باشد، و برابر $\frac{n-1}{2}$ است، هرگاه n فرد باشد. بنابر این

$$\begin{vmatrix} & & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & \\ \iddots & & \mathbf{0} \\ 1 & & \end{vmatrix} = \det(e_n,\ldots,e_1) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ زوج} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

۱۱. با استفاده از بسط لاپلاس بر حسب سطر اول داریم

$$D_n = 2|A_{11}| - (-1)|A_{12}|$$

اما چون $A_{11} = A_{n-1}$ داریم $|A_{11}| = D_{n-1}$ و هم‌چنین چون

$$|A_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)D_{n-2} \qquad \text{(بسط لاپلاس بر حسب ستون اول)}$$

داریم

$$D_n = 2|A_{11}| - (-1)(-1)D_{n-2} = 2D_{n-1} - D_{n-2}.$$

و بنابراین

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n.$$

اکنون مطابق تمرین ۱۸ از صفحه‌ی ۱۷ قرار می‌دهیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X_n = \begin{bmatrix} D_{n+1} \\ D_n \end{bmatrix}.$$

و داریم $X_{n+1} = AX_n$ و بنابراین $X_{n+1} = A^nX_1$. برای یافتن A^n از تمرین ؟؟ از صفحه‌ی ؟؟ که می‌گوید

$$A^2 - (2+0)A + (1)I = 0$$

استفاده می‌کنیم. داریم $A^2 = 2A - I$ و در نتیجه $A^3 = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A = 3A - 2I$ و به استقرا نتیجه می‌شود $A^n = nA - (n-1)I$ و بنابراین

$$A^n = n\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - (n-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{bmatrix}.$$

از این‌رو

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_{n+2} \\ D_{n+1} \end{bmatrix} &= X_{n+1} = A^nX_1 \\ &= \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & -(n-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n+3 \\ n+2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

بنابراین $D_{n+1} = n+2$ و در نتیجه $D_n = n+1$.

۱۲. برای $n = 1$ داریم $V_1 = 1$ و برای $n = 2$ داریم

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = (a_2 - a_1)V_1.$$

به استقرا فرض کنید

$$V_n = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})V_{n-1}.$$

اکنون V_{n+1} را در نظر می‌گیریم. ستون $n-1$ را در $-a_{n+1}$ ضرب کرده و با ستون nام جمع می‌کنیم، ستون $n-2$ را در $-a_{n+1}$ ضرب کرده و با ستون $n-1$ام جمع می‌کنیم، ...، ستون اول را در $-a_{n+1}$ ضرب کرده و با ستون دوم جمع می‌کنیم، سپس برحسب سطر $n+1$ بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 - a_{n+1} & a_1^2 - a_1a_{n+1} & \cdots & a_1^n - a_{n+1}a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n - a_{n+1} & a_n^2 - a_na_{n+1} & \cdots & a_n^n - a_na_{n+1}^{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+1+1}\begin{vmatrix} a_1 - a_{n+1} & a_1(a_1 - a_{n+1}) & \cdots & a_1^{n-1}(a_1 - a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - a_{n+1} & a_n(a_n - a_{n+1}) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n - a_{n+1}) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n(a_1 - a_{n+1})(a_2 - a_{n+1})\cdots(a_n - a_{n+1})\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_2)\cdots(a_{n+1} - a_n)V_n \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر عدد طبیعی n داریم $V_n = (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2})\cdots(a_n - a_1)V_{n-1}$. به استقرا فرض کنیم $V_{n-1} = \prod_{1 \le i < j \le n-1}(a_j - a_i)$، بنابراین

$$V_n = (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2})\cdots(a_n - a_1)V_{n-1} = \prod_{1 \le i < n}(a_n - a_i)\prod_{1 \le i < j \le n-1}(a_j - a_i) = \prod_{1 \le i < j \le n}(a_j - a_i).$$

راه دیگر: فرض کنید

$$p(x)=\begin{vmatrix} ۱ & a_۱ & a_۱^۲ & \cdots & a_۱^{n-۱}\\ ۱ & a_۲ & a_۲^۲ & \cdots & a_۲^{n-۱}\\ \vdots & \vdots & . & \vdots & .\\ ۱ & a_n & a_n^۲ & \cdots & a_{n-۱}^{n-۱} \\ ۱ & x & x^۲ & \cdots & x^{n-۱}\end{vmatrix}$$

اگر دترمینان بالا را برحسب سطر nام بسط دهیم، می‌بینیم که $p(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n بر حسب x است. توجه کنید که برای هر $i=۱,\dots n-۱$، $p(a_i)=۰$، زیرا اگر به جای x، a_i قرار دهیم، آن‌گاه سطر آخر و سطر iام ماتریس برابر هستند. بنابراین

$$p(x)=(x-a_۱)(x-a_۲)\cdots(x-a_{n-۱})d, \qquad (*)$$

که در آن d یک مقدار ثابت است. در واقع d ضریب $x^{n-۱}$ در $p(x)$ است، بنابراین در بسط لاپلاس $p(x)$ نسبت به سطر آخر d برابر (n,n)-همسازه

$$d=(-۱)^{n+n}\begin{vmatrix} ۱ & a_۱ & \cdots & a_۱^n\\ ۱ & a_۲ & \cdots & a_۲^n\\ \vdots & . & \vdots & .\\ ۱ & a_{n+۱} & \cdots & a_{n+۱}^n\end{vmatrix}$$

است. طبق فرض استقرا $d=\prod_{۱\le i<j\le n-۱}(a_j-a_i)$ و بنابراین حکم با استفاده از جایگذاری $x=a_n$ در $(*)$ نتیجه می‌شود.

۱۳. با استفاده از قضیه‌ی ۱۴.۲ داریم

$$\begin{aligned}\det(A+CD^\top) &= \begin{vmatrix} A & -C\\ D^\top & I_k\end{vmatrix}\\ &= \det(A)\det(I_k-D^\top A^{-۱}(-C))\\ &=\det(A)\det(I_k+D^\top A^{-۱}C)\end{aligned}$$

۱۴. ابتدا توجه می‌کنیم که به ازای هر اسکالر $\lambda\in F$ و هر ماتریس $A\in M_n(F)$ داریم

$$\det(\lambda A)=\det((\lambda I)A)=\det(\lambda I)\det(A)=\lambda^n\det(A).$$

اکنون قرار می‌دهیم $B=\lambda A$ بنابراین $\det(B_{ij})=\det(\lambda A_{ij})=\lambda^{n-۱}\det(A_{ij})$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}\,(\lambda A)=\mathrm{adj}\,(B) &= [(-۱)^{i+j}\det(B_{ji})]=[(-۱)^{i+j}\lambda^{n-۱}\det(A_{ji})]\\ &=\lambda^{n-۱}[(-۱)^{i+j}\det(A_{ji})]\\ &=\lambda^{n-۱}\mathrm{adj}\,(A).\end{aligned}$$

۱۵. می‌دانیم $A(\mathrm{adj}\,(A))=\det(A)I$. اگر $A=\mathbf{0}$، آن‌گاه دو طرف تساوی برابر صفر هستند و حکم مساله واضح است، پس فرض می‌کنیم که $A\neq \mathbf{0}$. اکنون اگر $\det(A)=۰$، آن‌گاه $A(\mathrm{adj}\,(A))=\mathbf{0}$ و بنابراین $\mathrm{adj}\,(A)$ وارون‌پذیر نیست (زیرا در غیر این صورت $A=\mathbf{0}$، که خلاف فرض است). در نتیجه $\det(\mathrm{adj}\,(A))=۰$ و مجددا دو طرف تساوی برابر صفر هستند. در نهایت اگر $\det(A)\neq۰$، آن‌گاه از رابطه‌ی $A(\mathrm{adj}\,(A))=\det(A)I$ داریم $\det(A(\mathrm{adj}\,(A)))=\det(\det(A)I)$ و بنابراین $\det(A)\det(\mathrm{adj}\,(A))=\det(A)^n$. از این‌رو $\det(\mathrm{adj}\,(A))=(\det(A))^{n-۱}$ و حکم ثابت است.

۱۶. (آ) فرض کنید A ماتریس گفته شده در صورت تمرین باشد. فرض کنید X بردار ستونی باشد که همه‌ی درایه‌های آن برابر ۱ است. در این صورت $XX^\top$ ماتریس مربعی است که همه‌ی درایه‌های آن برابر ۱ است. هم‌چنین فرض کنید $B=\mathrm{diag}\,(\frac{۱}{\lambda_۱},\dots,\frac{۱}{\lambda_n})$. در این صورت می‌توان نوشت $A=B+XX^\top$. از این‌رو با استفاده از قضیه‌ی ۱۲.۲ (ب) داریم

$$\begin{aligned}\det A &= \det(B+XX^\top)\\ &= \det(B)(۱+X^\top B^{-۱}X)\\ &= \frac{۱}{\lambda_۱\cdots\lambda_n}(۱+X^\top\mathrm{diag}\,(\lambda_۱,\dots,\lambda_n)X)\\ &= \frac{۱}{\lambda_۱\cdots\lambda_n}\left(۱+[۱\ ۱\ \cdots\ ۱]\begin{bmatrix}\lambda_۱\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}\right)\\ &= \frac{۱}{\lambda_۱\cdots\lambda_n}(۱+\lambda_۱+\cdots+\lambda_n).\end{aligned}$$

(ب) فرض کنید A ماتریس گفته شده در صورت تمرین باشد. اگر $\lambda=\mu$، آن‌گاه همه‌ی درایه‌های A برابر μ هستند و بنابراین $\det A=۰$. پس فرض کنید $\lambda\neq\mu$. فرض کنید X بردار ستونی باشد که همه‌ی درایه‌های آن برابر ۱ است. در این صورت $XX^\top$ ماتریس مربعی است که همه‌ی درایه‌های آن برابر ۱ است. در این صورت می‌توان نوشت $A=(\lambda-\mu)I+\mu XX^\top$. از این‌رو با استفاده از قضیه‌ی ۱۲.۲ (ب) داریم

$$\begin{aligned}\det A &= \det((\lambda-\mu)I+\mu XX^\top)\\ &= (\det((\lambda-\mu)I))\left(۱+X^\top((\lambda-\mu)I)^{-۱}(\mu X)\right)\\ &= (\lambda-\mu)^n\left(۱+\frac{۱}{\lambda-\mu}I(\mu X^\top X)\right)\\ &= (\lambda-\mu)^n\left(۱+\frac{n\mu}{\lambda-\mu}\right).\end{aligned}$$

(پ) فرض کنید A ماتریس گفته شده در صورت تمرین باشد. فرض کنید X بردار ستونی باشد که همه‌ی درایه‌های آن برابر ۱ است و $Y=(\lambda_۱,\dots,\lambda_n)^\top$ بردار ستونی باشد که درایه‌های آن به ترتیب $\lambda_۱,\dots,\lambda_n$ است. در این صورت $XY^\top$ ماتریس مربعی است که هر سطر آن بردار $(\lambda_۱,\dots,\lambda_n)$ است. بنابراین می‌توان نوشت $A=I+XY^\top$. از این‌رو با استفاده از قضیه‌ی ۱۲.۲ (الف) داریم

$$\begin{aligned}\det A &= \det(I+XY^\top)\\ &= ۱+Y^\top X\end{aligned}$$

$$= ۱ + \lambda_۱ + \cdots + \lambda_n.$$

۱۷. (آ) چون $[-۱] = -۱$ یک ماتریس ۱×۱ وارون‌پذیر است با استفاده از قضیه‌ی ؟؟ داریم

$$\begin{vmatrix} A & X \\ Y^\top & -۱ \end{vmatrix} = \det([-۱])\det(A - X[-۱]^{-۱}Y^\top) = -\det(A + XY^\top).$$

(ب) چون A وارون‌پذیر است با استفاده از قضیه‌ی ۲۰.۲ و فرمول $A^{-۱} = \dfrac{۱}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$ و این‌که $Y^\top A^{-۱}X$ یک ماتریس ۱×۱ است، داریم

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & X \\ Y^\top & ۰ \end{vmatrix} &= \det(A)\det(۰ - Y^\top A^{-۱}X) \\
&= -\det(A)Y^\top A^{-۱}X \\
&= -Y^\top(\det(A)A^{-۱})X \\
&= -Y^\top \operatorname{adj}(A)X.
\end{aligned}$$

۱۸. اگر $\lambda = ۰$، آن‌گاه دو طرف تساوی صفرند و چیزی برای اثبات نیست. پس فرض کنید $\lambda \neq ۰$. در این صورت چون λI_m وارون‌پذیر است با استفاده از قضیه‌ی ۱۴.۲ داریم

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda I_m & \lambda B \\ C & \lambda I_n \end{vmatrix} &= \det(\lambda I_m)\det(\lambda I_n - C(\lambda I_m)^{-۱}(\lambda B)) \\
&= \lambda^m \det(\lambda I_n - C\lambda^{-۱}I_m \lambda B) \\
&= \lambda^m \det(\lambda I_n - CB)
\end{aligned}$$

به همین ترتیب چون λI_n وارون‌پذیر است مجددا با استفاده از قضیه‌ی ۱۴.۲ داریم

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda I_m & \lambda B \\ C & \lambda I_n \end{vmatrix} &= \det(\lambda I_n)\det(\lambda I_m - (\lambda B)(\lambda I_n)^{-۱}C) \\
&= \lambda^n \det(\lambda I_m - \lambda B\lambda^{-۱}I_n C) \\
&= \lambda^n \det(\lambda I_m - BC)
\end{aligned}$$

۱۹. ابتدا توجه کنید که چون درایه‌های ماتریس A صحیح هستند پس درایه‌های ماتریس $\operatorname{adj}(A)$ و هم‌چنین $\det(A)$ نیز صحیح هستند. اکنون فرض کنید که $\det(A) = \pm ۱$. چون $A^{-۱} = \dfrac{۱}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \pm\operatorname{adj}(A)$ و درایه‌های ماتریس $\operatorname{adj}(A)$ صحیح هستند، پس پس درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ نیز صحیح هستند. برای اثبات عکس مطلب فرض کنید درایه‌های ماتریس $A^{-۱}$ صحیح باشند. چون $\det(A)$ و $\det(A^{-۱})$ اعداد صحیح هستند و $۱ = \det(I) = \det(AA^{-۱}) = \det(A)\det(A^{-۱})$ نتیجه می‌گیریم که $\det(A) = \pm ۱$.

۲۰. (آ) با استفاده از فرض $AX = u$ و قضیه‌ی ۱۲.۲ از صفحه‌ی ۵۶ داریم

$$\det(A + uv^\top) = \det(A + AXv^\top) = \det(A)\det(I + Xv^\top)$$

$$= \det(A)(۱ + v^\top X).$$

(ب) با استفاده فرض $Y^\top A = v^\top$ و قضیه‌ی ۱۲.۲ از صفحه‌ی ۵۶ داریم

$$\begin{aligned}
\det(A + uv^\top) &= \det(A + uY^\top A) = \det((I + uY^\top)A) \\
&= \det(I + uY^\top)\det(A) \\
&= (۱ + Y^\top u)\det(A).
\end{aligned}$$

۲۱. (آ) با استفاده از تمرین ۱۹ درایه‌های $A^{-۱}$ اعداد صحیح هستند اگر و تنها اگر $\det(A) = \pm ۱$ اگر و تنها اگر، طبق قضیه‌ی ۱۲.۲ از صفحه‌ی ۵۶، $\pm ۱ = \det(A) = \det(I - ۲XY^\top) = ۱ - ۲Y^\top X$ اگر و تنها اگر $Y^\top X$ برابر ۰ یا ۱ باشد. (ب) با توجه به قضیه‌ی ۱۲.۲ از صفحه‌ی ۵۶، و فرض $Y^\top X = ۱$ داریم

$$A^{-۱} = (I - ۲XY^\top)^{-۱} = I - \frac{۲XY^\top}{۲Y^\top X - ۱} = I - \frac{۲XY^\top}{۲ - ۱} = I - ۲XY^\top = A.$$

۲۲.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum \varepsilon(\sigma) a_{۱j_۱}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum \varepsilon(\sigma) a_{۱j_۱}\cdots (x_{p_k} + y_{p_k} + \cdots + z_{p_k})\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum \varepsilon(\sigma) a_{۱j_۱}\cdots x_{p_k}\cdots a_{nj_n} + \sum \varepsilon(\sigma) a_{۱j_۱}\cdots y_{p_k}\cdots a_{nj_n} \\
&\qquad + \cdots + \sum \varepsilon(\sigma) a_{۱j_۱}\cdots z_{p_k}\cdots a_{nj_n} \\
&= \det\begin{bmatrix} A_{۱*} \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_{n*} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} A_{۱*} \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_{n*} \end{bmatrix} + \cdots + \det\begin{bmatrix} A_{۱*} \\ \vdots \\ Z \\ \vdots \\ A_{n*} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

۲۳.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(A) &= \frac{d}{dt}\sum \varepsilon(\sigma) a_{۱j_۱}a_{۲j_۲}\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum \varepsilon(\sigma)\frac{d}{dt} a_{۱j_۱}a_{۲j_۲}\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum \varepsilon(\sigma)(a'_{۱j_۱}a_{۲j_۲}\cdots a_{nj_n} + a_{۱j_۱}a'_{۲j_۲}\cdots a_{nj_n} + \cdots a_{۱j_۱}a_{۲j_۲}\cdots a'_{nj_n}) \\
&= \sum \varepsilon(\sigma) a'_{۱j_۱}a_{۲j_۲}\cdots a_{nj_n} + \sum \varepsilon(\sigma) a_{۱j_۱}a'_{۲j_۲}\cdots a_{nj_n} + \cdots \\
&\qquad + \sum \varepsilon(\sigma) a_{۱j_۱}a_{۲j_۲}\cdots a'_{nj_n} \\
&= \det(D_۱) + \det(D_۲) + \cdots + \det(D_n).
\end{aligned}$$

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

حل برخی از تمرین‌ها، ویرایش اول (ممکن است ایراد وجود داشته باشد)

(حل تمرین‌های فصل ۳)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

حل تمرین‌های بخش ۱.۳ صفحه‌ی ۷۴

۱. (آ) با اضافه کردن $-u$ به طرفین تساوی $u+v=u+w$ داریم

$$-u+(u+v)=-u+(u+w) \Longrightarrow (-u+u)+v=(-u+u)+w \Longrightarrow 0+v=0+w \Longrightarrow v=w.$$

(ب) توجه می‌کنیم که با استفاده از (آ) داریم اگر $u=u+u$، آن‌گاه $u=0$. اکنون داریم $0v+0v=(0+0)v=0v$ و بنابراین $0v=0$. هم‌چنین چون $0a+0a=(0+0)a=0a$، داریم $0a=0$. درنهایت چون $v+(-1)v=1v+(-1)v=(1+(-1))v=0v$ داریم $(-1)v=-v$.

(پ) اگر $a\neq 0$، آن‌گاه با ضرب a^{-1} در $av=0$ داریم $a^{-1}(av)=a^{-1}0$ و در نتیجه $(a^{-1}a)v=0$، یعنی $1v=0$، یعنی $v=0$.

(ت) چون $0=0v$ داریم $(-a+a)v=0$ و بنابراین $(-a)v+av=0$. پس $(-a)v=-(av)$. هم‌چنین چون $a0=0$ داریم $a(v+(-v))=0$ و بنابراین $av+a(-v)=0$. پس $a(-v)=-(av)$.

حل تمرین‌های بخش ۲.۳ صفحه‌ی ۷۹

۱. فرض کنید $U\not\subseteq W$. نشان می‌دهیم $W\subseteq U$. چون $U\not\subseteq W$ بردار $u\in U$ وجود دارد که در W نیست. اکنون بردار دلخواه $w\in W$ را در نظر می‌گیریم. چون $u,w\in U\cup W$ و $U\cup W$ زیرفضا است، پس $u+w\in U\cup W$ از این رو $u+w\in U$ یا $u+w\in W$. اگر $u+w\in W$، آن‌گاه چون W زیرفضا است $u=(u+w)-w\in W$ که تناقض است. بنابراین $u+w\in U$ و چون U زیرفضا است $w=(u+w)-u\in U$. پس نشان دادیم که $W\subseteq U$، بنابراین حکم ثابت است.

۲. به برهان خلف حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم درست نباشد و n کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت باشد که V را بتوان به صورت اجتماع n زیر فضا نوشت. طبق تمرین ۱، $n\geq 3$. فرض کنید V_1، V_2، …، V_n زیرفضاهای نابدیهی از V باشند به طوری که $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$. قرار می‌دهیم $S=\bigcup_{i=2}^{n}V_i$. طبق خاصیت n داریم $V_1\not\subseteq S$ و $S\not\subseteq V_1$. بنابراین $v\in V_1\setminus S$ و $u\in S\setminus V_1$ وجود دارند. اگر $\lambda\in F$ وجود داشته باشد که $\lambda v+u\in V_1$، آن‌گاه چون V_1 زیرفضا است داریم

$$u=-\lambda v+(\lambda v+u)\in V_1$$

که تناقض است. پس به ازای هر $\lambda\in F$ داریم $\lambda v+u\notin V_1$. در نتیجه به ازای هر $\lambda\in F$ داریم $\lambda v+u\in S$. چون $S=\bigcup_{i=2}^{n}V_i$ اجتماع تعدادی متناهی مجموعه است و F نامتناهی است، پس $2\leq i\leq n$ و اسکالرهای متمایز $\lambda,\mu\in F$ وجود دارند که $\lambda v+u,\mu v+u\in V_i$. اکنون چون V_i زیرفضا است داریم $(\lambda v+u)-(\mu v+u)=(\lambda-\mu)v\in V_i$ و چون $\lambda-\mu$ ناصفر است خواهیم داشت $v\in V_i$، و در نتیجه $v\in S$، که تناقض است.

راه دوم: فرض کنید حکم درست نباشد و n کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت باشد که V را بتوان به صورت اجتماع n زیر فضا نوشت. فرض کنید V_1، V_2، …، V_n زیرفضاهای نابدیهی از V باشند به طوری که $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$. قرار می‌دهیم $S=\bigcup_{i=2}^{n}V_i$. طبق فرض اعضای $x\in V_1\setminus S$ و $y\in V\setminus V_1$ وجود دارند. اکنون $n+1$ اسکالر λ_1، λ_2، …، λ_{n+1} را در نظر می‌گیریم. اکنون $n+1$ بردار $x+\lambda_i$، $i=1,\ldots,n+1$، در $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$ قرار دارند. بنابراین حداقل دو بردار متمایز $x+\lambda_j y$ و $x+\lambda_i y$ در یکی از زیرفضاها مثلاً V_r قرار

می‌گیرند. بنابراین $(\lambda_i-\lambda_j)y = x+\lambda_i y-(x+\lambda_j y)\in V_r$ و در نتیجه $y\in V_r$. از این‌رو $r>1$. اکنون چون $x+\lambda_i y\in V_r$ و $y\in V_r$ داریم $x=x+\lambda_y y-\lambda_i y\in V_r$، که تناقض است.

۳. با توجه به تمرین قبل باید یک فضای برداری روی یک میدان متناهی مثال بزنیم. میدان $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ را در نظر می‌گیریم (در $\mathbb{Z}_2$ جمع و ضرب به پیمانه ۲ انجام می‌شود). فضای برداری $V:=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ را روی $\mathbb{Z}_2$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $W_1=\{(0,0),(1,0)\}$، $W_2=\{(0,0),(0,1)\}$ و $W_3=\{(0,0),(1,1)\}$ زیرفضاهای V هستند و $V=W_1\cup W_2\cup W_3$.

۴. ساده است.

۵. فرض کنید

$$B=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\5\end{bmatrix},\quad X_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

در این صورت اسکالرهای $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=B$$

اگر و تنها اگر $AX=B$، که در آن

$$A=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&-1\\-1&1&2\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}.$$

ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&-1\\-1&0&1&2\\1&1&-1&0\\-1&1&2&5\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\-1&0&1&2\\0&-1&1&-1\\-1&1&2&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1+R_4\to R_4]{R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&0&2\\0&-1&1&-1\\0&2&1&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2+R_3\to R_3\\-2R_2+R_4\to R_4}]{-R_2+R_1\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-2\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_4\to R_4]{R_3+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

بنابراین $c_3=1$، $c_2=2$ و $c_1=-1$. در نتیجه $B=-X_1+2X_2+X_3$ در $\operatorname{span}\{X_1,X_2,X_3\}$ قرار دارد.

۶. فرض کنید

$$B=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad X_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\-4\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix}3\\1\\-2\\4\end{bmatrix}.$$

در این صورت اسکالرهای $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=B$$

اگر و تنها اگر $AX=B$، که در آن

$$A=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&1\\3&1&-2\\-4&-1&4\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}.$$

ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\1&1&1&-1\\3&1&-2&0\\-4&-1&4&1\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{-3R_1+R_3\to R_3\\4R_1+R_4\to R_4}]{-R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&-1&-2&-2\\0&-5&-11&-3\\0&3&8&-3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{-5R_2+R_3\to R_3\\3R_2+R_4\to R_4\\-R_2\to R_2}]{-2R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-3\\0&1&2&2\\0&0&-1&7\\0&0&2&-9\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{2R_3+R_4\to R_4\\ -R_3\to R_3}]{\substack{-R_3+R_1\to R_1\\ 2R_3+R_2\to R_2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-10\\0&1&0&16\\0&0&1&-7\\0&0&0&5\end{array}\right]$$

با توجه به معادله‌ی چهارم که می‌گوید $0c_1+0c_2+0c_3=5$ دستگاه جواب ندارد. بنابراین بردار B در فضای تولید شده توسط بردارهای مورد نظر قرار ندارد.

حل تمرین‌های بخش ۳.۳ صفحه‌ی ۸۳

۱. (آ) فرض کنید

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

در این صورت اسکالرهای $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=\mathbf{0}$$

اگر و تنها اگر $AX=\mathbf{0}$، که در آن

$$A=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}.$$

ماتریس ضرایب را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\ -R_1+R_3\to R_3}}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&-2\\0&-1&1\\0&-2&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/2\to R_2}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&-1&1\\0&-2&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2R_2+R_1\to R_1]{\substack{R_2+R_3\to R_3\\ 2R_2+R_4\to R_4}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$$

از معادله‌ی سوم نتیجه می‌شود $c_3=0$ و با قرار دادن در معادله‌های اول و دوم ملاحظه می‌کنیم که $c_1=c_2=0$. بنابراین بردارهای داده شده مستقل خطی هستند.

(ب) فرض کنید

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\2\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\\1\end{bmatrix}.$$

در این صورت اسکالرهای $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=\mathbf{0}$$

اگر و تنها اگر $AX=\mathbf{0}$، که در آن

$$A=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&-1&1\\3&2&0\\2&1&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}.$$

ماتریس ضرایب را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&-1&1\\3&2&0\\2&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\ -3R_1+R_3\to R_3}}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\0&2&-6\\0&1&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+R_4\to R_4]{2R_2+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

از معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود $c_2=3c_3$ و از معادله‌ی اول نتیجه می‌شود $c_1=-c_3$. بنابراین دستگاه دارای جواب نابدیهی است و بردارهای داده شده وابسته ی خطی هستند. مثلاً اگر قرار دهیم $c_3=1$، آن‌گاه $c_1=-1$ و $c_2=3$ و بنابراین $-X_1+3X_2+X_3=\mathbf{0}$، یک

بستگی خطی این بردارها را مشخص می‌کند.

(پ) فرض کنید

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\-4\\3\\1\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\-1\end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

در این صورت اسکالرهای $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=\mathbf{0}$$

اگر و تنها اگر $AX=\mathbf{0}$، که در آن

$$A=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix}1&2&1\\-4&-1&1\\3&3&-1\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}.$$

ماتریس ضرایب را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\-4&-1&1\\3&3&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-3R_1+R_3\to R_3\\-R_1+R_4\to R_4}]{4R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&7&5\\0&-3&-4\\0&-3&0\end{bmatrix}.$$

از معادله‌ی چهارم نتیجه می‌شود $c_2=0$ و با قرار دادن در معادله‌های دوم و اول ملاحظه می‌کنیم که $c_1=c_3=0$. بنابراین بردارهای داده شده مستقل خطی هستند.

۲. مشابه مساله ۱ است.

۳. قرار می‌دهیم

$$A_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}-1&0\\1&-1\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix}-1&0\\-1&1\end{bmatrix}.$$

در این صورت اسکالرهای $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3+c_4A_4=\mathbf{0}$$

اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix}c_1-c_2-c_4&c_1-c_3\\c_2+c_3-c_4&c_1-c_2+c_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

از $c_1-c_3=0$ نتیجه می‌گیریم $c_1=c_3$. از $c_1-c_2-c_4=0$ و $c_1-c_2+c_4=0$ نتیجه می‌گیریم $c_1=c_2$. در نهایت از $c_2+c_3-c_4=0$ نتیجه می‌گیریم $c_4=c_2+c_3$. بنابراین $c_1=c_2=c_3$ و $2c_1=c_4$. پس ماتریس‌های داده شده وابسته‌ی خطی هستند.

۴. ($\Longrightarrow$) فرض کنید $\operatorname{span}(X)=\operatorname{span}(X\setminus\{x\})$. دراین صورت چون $x\in\operatorname{span}(X)=\operatorname{span}(X\setminus\{x\})$، داریم $x\in\operatorname{span}(X\setminus\{x\})$.

($\Longleftarrow$) فرض کنید $x\in\operatorname{span}(X\setminus\{x\})$. چون $X\setminus\{x\}\subseteq X$، شمول $\operatorname{span}(X\setminus\{x\})\subseteq\operatorname{span}(X)$ واضح است. برای اثبات عکس شمول، یعنی $\operatorname{span}(X)\subseteq\operatorname{span}(X\setminus\{x\})$ واضح است، زیرا طبق فرض $x\in\operatorname{span}(X\setminus\{x\})$ هر عضو از X در $\operatorname{span}(X\setminus\{x\})$ قرار دارد.

۵. فرض کنید C_j، $j=1,2,\dots,n$، ستون‌های ماتریس V باشند. فرض کنید اسکالرهای $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in F$ وجود داشته باشند که $a_0C_1+a_1C_2+\cdots+a_{n-1}C_n=\mathbf{0}$. بنابراین

$$V\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

و این معادل است با

$$a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_{n-1}x_i^{n-1}=0,\quad i=1,2,\dots,m.$$

پس x_i، $i=1,\dots,m$، ریشه‌ی چندجمله‌ای $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ است. چون هر چندجمله‌ای ناصفر از درجه $n-1$ حداکثر $n-1$ ریشه دارد و $p(x)$ دارای m ریشه است که $m\geq n>n-1$، پس $p(x)=0$، یعنی $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$. بنابراین ستون‌های V مستقل خطی هستند.

فرض کنید (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، …، (x_n,y_n)، n نقطه باشند، به طوری که x_iها متمایزند. نشان دهید یک چندجمله‌ای درجه‌ی n یکتای $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ وجود دارد که $f(x_i)=y_i$، $i=1,2,\dots,n$. (واندرموند)

حل تمرین‌های بخش ۴.۳ صفحه‌ی ۹۶

۱. چون $0+0=0$، پس دنباله (0) در W قرار دارد. حال اگر $u=(a_n),v=(b_n)\in W$ و $\lambda\in F$ داریم

$$a_n+b_n=(a_{n-1}+a_{n-2})+(b_{n-1}+b_{n-2})=(a_{n-1}+b_{n-1})+(a_{n-2}+b_{n-2})$$
$$\lambda a_n=\lambda(a_{n-1}+a_{n-2})=\lambda a_{n-1}+\lambda a_{n-2}.$$

بنابراین $u+v=(a_n+b_n)\in W$ و $\lambda u=(\lambda u)\in W$. از این‌رو W یک زیرفضای V است. حال اگر (a_n) عضوی از W باشد داریم

$$a_3=a_1+a_2,\ a_4=a_2+a_3=a_1+2a_2,\ a_5=a_3+a_4=2a_1+3a_3,\ a_6=3a_1+5a_2,\dots$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(a_n) &= (a_1,a_2,a_3,\ldots)\\ &= (a_1,a_2,a_1+a_2,a_1+2a_2,2a_1+3a_2,\ldots)\\ &= a_1(1,0,1,1,2,3,\ldots)+a_2(0,1,1,2,3,5,\ldots)\end{aligned}$$

و پایه‌ای برای W عبارتست از $\{(1,0,1,1,2,3,\ldots),(0,1,1,2,3,5,\ldots)\}$.

۲. مشابه تمرین ۱ است.

۳. مجموعه‌ی $\{1,i\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{R}$ است. پس بعد $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{R}$ برابر ۲ است. مجموعه‌ی $\{1\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}$ است. پس بعد $\mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}$ برابر ۱ است.

۴. همان قضیه ۲۴.۳ است.

۵. فرض کنید $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. در این صورت $B\in W$ اگر و تنها اگر $AB=BA$ داریم

$$\begin{aligned}AB&=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-c&b-d\\2c&2d\end{bmatrix}\\ BA&=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&-a+2d\\c&-c+2d\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن درایه‌های متناظر می‌بینیم که $c=0$ و $b=3d-a$. بنابراین ماتریس B به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix}a&3d-a\\0&d\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&3\\0&1\end{bmatrix}.$$

پس پایه‌ای برای W عبارت است از

$$\left\{\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&3\\0&1\end{bmatrix}\right\}.$$

۶. فرض کنید $A=[a_{ij}]$ در این صورت

$$A^\top=-A\iff[a_{ji}]=-[a_{ij}]\iff\forall 1\le i,j\le n,\ a_{ji}=-a_{ij}.$$

به ویژه $a_{ii}=-a_{ii}$ که نتیجه می‌دهد به ازای هر $i=1,\ldots$، $a_{ii}=0$. پس درایه‌های روی قطر A همگی برابر صفر هستند و داریم

$$\begin{aligned}A&=\sum_{1\le i,j\le n}a_{ij}E_{ij}\\ &=\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}E_{ij}+\sum_{1\le j<i\le n}a_{ij}E_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}E_{ij}+\sum_{1\le j<i\le n}(-a_{ji})E_{ij}\\ &=\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}E_{ij}+\sum_{1\le i<j\le n}(-a_{ij})E_{ji}\\ &=\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}(E_{ij}-E_{ji}).\end{aligned}$$

پس مجموعه‌ی $\{E_{ij}-E_{ji}\mid 1\le i<j\le n\}$ یک پایه برای فضای $W=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid A^\top=-A\}$ است.

۷. (آ) فرض کنید $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ یک ماتریس قطری دلخواه باشد. در این صورت

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_iE_{ii}$$

و بنابراین مجموعه‌ی $\{E_{ii}\mid 1\le i\le n\}$ یک پایه برای زیرفضای ماتریس‌های قطری است.

(ب) فرض کنید $A=[a_{ij}]$، که در آن برای هر $i>j$ داریم $a_{ij}=0$ یک ماتریس بالا مثلثی باشد. در این صورت

$$A=\sum_{1\le i\le j\le n}^{n}a_{ij}E_{ij}$$

و بنابراین مجموعه‌ی $\{E_{ij}\mid 1\le i\le j\le n\}$ یک پایه برای زیرفضای ماتریس‌های بالا مثلثی است.

(پ) فرض کنید $A=[a_{ij}]$، که در آن برای هر $1\le i,j\le n$ داریم $a_{ij}=a_{ji}$ یک ماتریس متقارن باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}A&=\sum_{1\le i,j\le n}^{n}a_{ij}E_{ij}\\ &=\sum_{1\le i<j\le n}^{n}a_{ij}E_{ij}+\sum_{1\le j<i\le n}^{n}a_{ij}E_{ij}+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_{ii}\\ &=\sum_{1\le i<j\le n}^{n}a_{ij}E_{ij}+\sum_{1\le j<i\le n}^{n}a_{ji}E_{ij}+\sum_{i=n}^{n}a_{ii}E_{ii}\\ &=\sum_{1\le i<j\le n}^{n}a_{ij}E_{ij}+\sum_{1\le i<j\le n}^{n}a_{ij}E_{ji}+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_{ii}\\ &=\sum_{1\le i<j\le n}^{n}a_{ij}(E_{ij}+E_{ji})+\sum_{i=1}^{n}a_{ij}E_{ii}\end{aligned}$$

و بنابراین مجموعه‌ی $\{E_{ij}+E_{ji}\mid 1\le i<j\le n\}\cup\{E_{ii}\mid 1\le i\le n\}$ یک پایه برای زیرفضای ماتریس‌های متقارن است.

۸. قرار می‌دهیم

$$X_1=(1,1,0,1,1),\ X_2=(1,1,0,0,1),\ X_3=(2,1,-1,0,1),\ X_4=(0,1,1,1,1).$$

ماتریس ضرایب مجموعه‌بردارهای بالا را نسبت به پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^5$ تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی

سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{-R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_1\to R_1]{\substack{-R_3\to -R_3 \\ R_3+R_2\to R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین $\{(1,0,-1,0,0),(0,1,1,0,1),(0,0,0,1,0)\}$ پایه مورد نظر است.

۹. فرض کنید A وارون‌پذیر باشد. چون

$$\begin{aligned} c_1(AX_1)+\cdots+c_n(AX_n)=\mathbf{0} &\implies A(c_1X_1+\cdots+c_nX_n)=\mathbf{0} \\ &\implies A^{-1}A(c_1X_1+\cdots+c_nX_n)=A^{-1}\mathbf{0} \\ &\implies c_1X_1+\cdots+c_nX_n=\mathbf{0} \\ &\implies c_1=\cdots=c_n=0 \end{aligned}$$

پس $\{AX_1,\ldots,A_nX_n\}$ مستقل خطی است. از طرف دیگر طبق قضیه‌ی ۲۴.۳ هر n بردار مستقل خطی (یک زیرفضای n بعدی تولید می‌کنند) در یک فضای برداری n بعدی یک پایه تشکیل می‌دهند. چون $\dim F^n=n$، پس $\{AX_1,\ldots,A_nX_n\}$ یک پایه برای F^n است.

اکنون فرض کنید $\{AX_1,\ldots,A_nX_n\}$ یک پایه برای F^n باشد. اگر نشان دهیم دستگاه $AX=\mathbf{0}$ دارای جواب بدیهی $X=\mathbf{0}$ است، از قضیه‌ی ۱۷.۱ نتیجه می‌گیریم که A وارون‌پذیر است. فرض کنید X جوابی از دستگاه $AX=\mathbf{0}$ باشد. چون $\{X_1,\ldots,X_n\}$ پایه‌ای برای F^n است، اسکالرهای $c_1,\ldots,c_n\in F$ وجود دارند که $X=c_1X_1+\cdots+c_nX_n$. در نتیجه

$$\mathbf{0}=AX=A(c_1X_1+\cdots+c_nX_n)=c_1(AX_1)+c_2(AX_1)+\cdots+c_n(AX_n)$$

چون $\{AX_1,\ldots,A_nX_n\}$ یک پایه برای F^n است، $c_1=\cdots=c_n=0$، یعنی $X=\mathbf{0}$ و در نتیجه دستگاه $AX=\mathbf{0}$ دارای جواب بدیهی $X=\mathbf{0}$ است.

۱۰. (آ) چون X یک مجموعه‌ی مولد برای V است، طبق قضیه‌ی ۲۷.۳ یک زیرمجموعه‌ی Y از X وجود دارد که Y پایه‌ای برای V است. اگر Y زیرمجموعه‌ی سره از X باشد، آنگاه $n=\dim V=|Y|<|X|=n$، که تناقض است. پس $Y=X$ یک پایه برای V است.
(ب) چون X یک مجموعه‌ی مستقل خطی است، طبق قضیه‌ی ۲۵.۳، یک مجموعه‌ی Y از بردارها شامل X وجود دارد که Y یک پایه برای V است. اگر X زیرمجموعه‌ی سره از Y باشد، آن‌گاه $n=|X|<|Y|=\dim V=n$، که تناقض است. پس $Y=X$ یک پایه برای V است.

۱۱. چون $\dim\mathbb{R}^3=3$، هر مجموعه متشکل از سه بردار که $\mathbb{R}^3$ را تولید کند، پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ است (تمرین ۱۰). پس کافی‌است نشان دهیم بردارهای داده شده $\mathbb{R}^3$ را تولید می‌کنند. در این فرایند مختصات بردارها نسبت به پایه جدید به دست می‌آید. قرار می‌دهیم

$$B=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\quad X_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

در این صورت اسکالرهای $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ وجود دارند که

$$c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3=B$$

اگر و تنها اگر $AX=B$، که در آن

$$A=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

ماتریس افزوده را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{\substack{-R_1\to R_1 \\ R_1+R_2\to R_2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 2 & 0 & a+c \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3/2\to R_3]{\substack{-R_2\leftrightarrow R_3 \\ R_2/2\to R_2}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+b}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a+c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+b}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&\frac{b+c}{2}\\ 0&1&0&\frac{a+c}{2}\\ 0&0&1&\frac{a+b}{2}\end{array}\right].$$

بنابراین $\mathscr{A}=\{X_1,X_2,X_3\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ است و مختصات بردار $B=(a,b,c)$ نسبت به این‌پایه عبارتست از $[B]_{\mathscr{A}}=(\frac{b+c}{2},\frac{a+c}{2},\frac{a+b}{2})$.

۱۲. مشابه تمرین ۱۱ است.

۱۳. باید اسکالرهای $a,b,c\in F$ را طوری بیابیم که $1+x+x^2=a\times 2+b(x-1)+c(x-2)(x+2)$. داریم

$$1+x+x^2=a\times 2+b(x-1)+c(x-2)(x+2)=2a+b-4c+bx+cx^2$$

و بنابراین $2a+b-4c=1$، $b=1$، $c=1$. در نتیجه $a=2$، $b=c=1$.

۱۴. (آ) داریم

$$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in W\iff a=p(0)=0\iff p(x)=bx+cx^2+dx^3.$$

در نتیجه $\{x,x^2,x^3\}$ یک پایه برای W است.

(ب) داریم

$$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in W\iff b+2cx+3dx^2=p'(x)=0\iff p(x)=a.$$

در نتیجه $\{1\}$ یک پایه برای W است.

(پ) داریم

$$\begin{aligned} p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in W &\iff p(x)=p(-x)\\ &\iff a+bx+cx^2+dx^3=a-bx+cx^2-dx^3\\ &\iff a=d=0\\ &\iff p(x)=bx+cx^2. \end{aligned}$$

در نتیجه $\{x,x^2\}$ یک پایه برای W است.

(ب) داریم

$$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in W\iff 2c=p''(0)=0\iff p(x)=a+bx+dx^3.$$

در نتیجه $\{1,x,x^3\}$ یک پایه برای W است.

۱۵. ماتریس بردارهای $f_1(x)=x^3-1$، $f_2(x)=x^3+x^2$، $f_3(x)=x^3-x^2$، و $f_4(x)=x^3$ را نسبت به پایه استاندارد $\{1,x,x^2,x^3\}$ از $F_3[x]$ را تشکیل داده و با انجام اعمال سطری-مقدماتی ماتریس تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} -1&0&0&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_2+R_3\to R_3]{-R_1\to R_1}\begin{bmatrix} 1&0&0&-1\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{\substack{-R_4+R_2\to R_2\\ R_4+R_1\to R_1}}\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

بنابراین $\{1,x^2,x^3\}$ پایه مورد نظر است.

۱۶. فرض کنید

$$\begin{aligned} &p_0(x)=a_{0,0}\\ &p_1(x)=a_{1,1}x+a_{1,0}\\ &p_2(x)=a_{2,2}x^2+a_{2,1}x+a_{2,0}\\ &\vdots\\ &p_{n-1}(x)=a_{n-1,n-1}x^{n-1}+a_{n-1,n-2}x^{n-2}+\cdots+a_{n-1,2}x^2+a_{n-1,1}x+a_{n-1,0}\\ &p_n(x)=a_{n,n}x^n+a_{n,n-1}x^{n-1}+a_{n,n-2}x^{n-2}+\cdots+a_{n,2}x^2+a_{n,1}x+a_{n,0} \end{aligned}$$

ماتریس مجموعه بردارهای $\{p_n(x),p_{n-1},\dots,p_1(x),p_0(x)\}$ نسبت به پایه $\{x^n,x^{n-1},\dots,x,1\}$ عبارتست از

$$\begin{bmatrix} a_{n,n}&a_{n,n-1}&a_{n,n-2}&\cdots&a_{n,2}&a_{n,1}&a_{n,0}\\ 0&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n-2}&\cdots&a_{n-1,2}&a_{n-1,1}&a_{n-1,0}\\ \vdots&&&&&&\\ &&&\ddots&&&\\ 0&0&0&0&a_{2,2}&a_{2,1}&a_{2,0}\\ 0&0&0&0&0&a_{1,1}&a_{1,0}\\ 0&0&0&0&0&0&a_{0,0} \end{bmatrix}$$

که یک ماتریس بالا مثلثی بدون سطر صفر است. بنابراین $n+1$ بردار داده شده مستقل خطی‌اند و چون بعد $F_{n+1}[x]$ روی F برابر $n+1$ است، این بردارها یک پایه برای $F_{n+1}[x]$ تشکیل می‌دهند.

۱۷. اگر $a=0$، آن‌گاه a ریشه‌ای از $f(x)=x\in W$ است، و بنابراین $\{x\}$ یک پایه برای W است. اگر $a\neq 0$، آن‌گاه a ریشه‌ای از $f(x)=\frac{1}{a}x-1\in W$ است، و بنابراین $\{1,x\}$ یک پایه برای W است.

۱۸. فرض کنید $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ پایه‌ای برای U باشد. در این صورت بردارهای $w_{k+1}, \dots, w_n \in W$ وجود دارند، به طوری که $\{w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$ پایه‌ای برای W است. اکنون اگر قرار دهیم $W_1 = \operatorname{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$، آن‌گاه $U \subseteq W_1 \subseteq W$ و $\dim W_1 = m$.

۱۹. فرض کنید $\mathscr{B} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ پایه‌ای برای W باشد و $m \geq n+1$ فرض کنید $A_i^{(1)}$ سطر اول A_i باشد. چون $m \geq n+1$، اسکالرهای $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ وجود دارند که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است و

$$c_1A_1^{(1)} + c_2A_2^{(1)} + \cdots + c_mA_m^{(1)} = \mathbf{0}.$$

قرار می‌دهیم $A = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_mA_m$. در این صورت طبق رابطه‌ی بالا سطر اول A برابر صفر است. اکنون $A \in W$ و چون برخی از c_iها صفر نیستند و $\mathscr{B}$ مستقل خطی است، داریم $A \neq \mathbf{0}$ از این‌رو طبق فرض A وارون‌پذیر است. اما چون سطر اول A برابر صفر است A وارون‌پذیر نیست، که تناقض است.

۲۰. فرض کنید $B \in W$. در این صورت $AB = BA$. چون به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ داریم

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj} = c_i[B]_{ij} \quad \text{و} \quad [BA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[B]_{ik}[A]_{kj} = [B]_{ij}c_j$$

پس $c_i[B]_{ij} = [B]_{ij}c_j$، یعنی $(c_i - c_j)[B]_{ij} = 0$. با توجه به این‌که به ازای هر $i \neq j$، $c_i \neq c_j$ خواهیم داشت $[B]_{ij} = 0$ به ازای هر $i \neq j$. از این‌رو B یک ماتریس قطری است. بنابراین $\dim W = n$.

۲۱. فرض کنید $B \in W$. در این صورت $AB = BA$. چون به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ داریم

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj} = c_i[B]_{ij} \quad \text{و} \quad [BA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[B]_{ik}[A]_{kj} = [B]_{ij}c_j$$

پس $c_i[B]_{ij} = [B]_{ij}c_j$، یعنی $(c_i - c_j)[B]_{ij} = 0$. با توجه به این‌که به ازای هر $i \neq j$، $c_i \neq c_j$ خواهیم داشت $[B]_{ij} = 0$ به ازای هر $i \neq j$. از این‌رو B یک ماتریس بلوکی به صورت $B = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)$ است، که در آن B_i یک ماتریس $d_i \times d_i$ است. بنابراین $\dim W = d_1^2 + \cdots + d_k^2$.

حل تمرین‌های بخش ۵.۳ صفحه‌ی ۱۰۴

۱. (آ) ابتدا ماتریس P را می‌یابیم که PA تحویل یافته‌ی سطری-پلکانی هم‌ارز با A باشد. ماتریس همانی I_3 را کنار A قرار داده و با استفاده از اعمال مقدماتی P را می‌یابیم

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_2 + R_3 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}R_3 \to R_3]{\substack{\frac{3}{2}R_3 + R_1 \to R_1 \\ \frac{3}{2}R_3 + R_2 \to R_2}} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

بنابراین داریم $PA = R$، که در آن

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اکنون با انجام اعمال ستونی-مقدماتی روی ماتریس تحویل یافته‌ی پلکانی هم‌ارز سطری با A، یعنی R، ماتریس Q را می‌یابیم که $PAQ = RQ$ به صورت مورد نظر باشد.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[4C_2 + C_3 \to C_3]{\substack{2C_1 + C_3 \to C_3 \\ -3C_1 + C_4 \to C_4}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_4} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

بنابراین

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

۲. (آ) $\Longleftarrow$ (ب). چون دستگاه دارای جواب است اسکالرهای $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ وجود دارند که $\lambda_1C_1 + \lambda_2C_2 + \cdots + \lambda_nC_n = B$، بنابراین $B \in \operatorname{span}\{C_1, \dots, C_n\}$.

(ب) $\Longleftarrow$ (پ). همواره داریم $\operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n\} \subseteq \operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n,B\}$. از طرف دیگر چون طبق فرض $B \in \operatorname{span}\{C_1,C_2,\dots,C_n\}$، پس $\operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n,B\} \subseteq \operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n\}$ و بنابراین $\operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n\} = \operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n,B\}$.

(پ) $\Longleftarrow$ (آ). چون $\operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n\} \subseteq \operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n,B\}$ و همچنین چون طبق فرض داریم $\dim\operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n,B\} = \dim\operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n\}$، نتیجه می‌گیریم که تساوی $\operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n\} = \operatorname{span}\{C_1,\dots,C_n,B\}$ برقرار است. از این‌رو $B \in \operatorname{span}\{C_1,C_2,\dots,C_n\}$ و بنابراین اسکالرهای $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in F$ وجود دارند که $\lambda_1C_1+\lambda_2C_2+\dots+\lambda_nC_n = B$، بنابراین دستگاه دارای جواب است.

حل تمرین‌های بخش ۶.۳ صفحه‌ی ۱۰۷

حل تمرین‌های بخش ۷.۳ صفحه ۱۱۸

۱. همان مثال ۴۱.۳ صفحه ۱۱۲ است. ابتدا پایه‌ای برای U می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_2+R_3\to R_3]{-R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,-3,-2),(0,1,3,1)\}$ یک پایه برای U است. اکنون پایه‌ای برای W می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_2+R_3\to R_3]{-R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,-2,0),(0,1,2,-1)\}$ یک پایه برای W است. اکنون با استفاده از پایه‌های یافته شده برای U و W یک پایه برای

$U+W$ می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_2+R_4\to R_4]{-R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3+R_4\to R_4]{\substack{3R_3+R_1\to R_1 \\ -3R_3+R_2\to R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,0,1),(0,1,0,-5),(0,0,1,2)\}$ یک پایه برای $U+W$ است.

اکنون یک دستگاه همگن می‌یابیم که U فضای جواب آن باشد. ابتدا باید دستگاه همگن

$$\begin{cases} (1,0,-3,-2)X^\top = 0 \\ (0,1,3,1)X^\top = 0 \end{cases}$$

یعنی دستگاه

$$\begin{cases} x-3z-2w = 0 \\ y+3z+w = 0 \end{cases}$$

را حل کنیم. جواب دستگاه عبارت است از

$$(x,y,z,w) = (3z+2w,-3z-w,z,w) = z(3,-3,1,0)+w(2,-1,0,1).$$

و $\{(3,-3,1,0),(2,-1,0,1)\}$ پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه است. پس طبق قضیه دستگاهی که U فضای جواب آن است، عبارت است از

$$\begin{cases} (3,-3,1,0)X^\top = 0 \\ (2,-1,0,1)X^\top = 0 \end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases} 3x-3y+z = 0 \\ 2x-y+w = 0. \end{cases}$$

اکنون یک دستگاه معادله‌ی خطی همگن می‌یابیم که W فضای جواب آن باشد. ابتدا باید دستگاه معادله‌ی خطی همگن

$$\begin{cases} (1,0,-2,0)X^\top = 0 \\ (0,1,2,-1)X^\top = 0 \end{cases}$$

یعنی دستگاه

$$\begin{cases} x+2y+2z-2w=0\\ -y-2z+w=0\end{cases}$$

را حل کنیم. اگر معادله‌ی دوم را در ۲ ضرب کرده و با معادله‌ی اول جمع کنیم داریم

$$\begin{cases} x-2z=0\\ -y-2z+w=0\end{cases}$$

و در نتیجه جواب دستگاه عبارت است از

$$(x,y,z,w)=(2z,-2z+w,z,w)=z(2,-2,1,0)+w(0,1,0,1)$$

و $\{(2,-2,1,0),(0,1,0,1)\}$ پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه است. پس طبق قضیه دستگاهی که W فضای جواب آن است، عبارت است از

$$\begin{cases}(2,-2,1,0)X^\top=0\\ (0,1,0,1)X^\top=0\end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases}2x-2y+z=0\\ y+w=0.\end{cases}$$

با تلفیق دو دستگاهی U و W در آن صدق می‌کنند و حل آن پایه‌ای برای $U\cap W$ به دست می‌آید

$$\begin{cases}3x-3y+z=0\\ 2x-y+w=0\\ 2x-2y+z=0\\ y+w=0.\end{cases}$$

با استفاده از اعمال سطری-مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه می‌توانیم آن‌را حل کنیم و پایه‌ای برای $U\cap W$ بیابیم. اما با چند محاسبه‌ی ساده نیز می‌توانیم این‌کار را انجام دهیم: از معادله‌های اول و سوم نتیجه می‌گیریم $z=0$ و $x=y$؛ هم‌چنین از معادله‌های چهارم و دوم نتیجه می‌گیریم $w=-y$ و $x=y$؛

۲. ابتدا پایه‌ای برای U می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&2&3&6\\4&-1&3&6\\5&1&6&12\end{bmatrix}\xrightarrow[-5R_1+R_3\to R_3]{-4R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&2&3&6\\0&-9&-9&-18\\0&-9&-9&-18\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{9}R_2\to R_2]{\substack{-R_2+R_3\to R_3\\ \frac{2}{9}R_2+R_1\to R_1}}\begin{bmatrix}1&0&1&10\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,1,10),(0,1,1,-2)\}$ یک پایه برای U است. اکنون پایه‌ای برای W می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\2&-1&4&5\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&-1&1&1\\0&1&2&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1\to R_2}\begin{bmatrix}1&0&3&4\\0&1&2&3\end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,3,4),(0,1,2,3)\}$ یک پایه برای W است. اکنون با استفاده از پایه‌های یافته شده برای U و W یک پایه برای $U+W$ می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&0&1&10\\0&1&1&2\\1&0&3&4\\0&1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_2+R_4\to R_4]{-R_1+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&1&10\\0&1&1&2\\0&0&2&-6\\0&0&1&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_4+R_1\to R_1]{\substack{-2R_4+R_3\to R_3\\ -R_4+R_2\to R_2}}\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-8\\0&0&0&-16\\0&0&1&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_4]{-\frac{1}{16}R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-8\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\qquad}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ یک پایه برای $U+W$ است. از این‌رو $U+W=\mathbb{R}^4$ و در نتیجه $U\cap W=\{0\}$.

۳. ابتدا پایه‌ای برای U می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&3&-2&2&3\\1&4&-3&4&2\\2&3&-1&-2&9\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&3&-2&2&3\\0&1&-1&2&-1\\0&-3&3&-6&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3R_2+R_3\to R_3]{-3R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}1&0&1&-4&6\\0&1&-1&2&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,1,-4,6),(0,1,-1,2,-1)\}$ یک پایه برای U است. اکنون پایه‌ای برای W می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\1&5&-6&6&3\\2&5&3&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&2&-6&4&2\\0&-1&3&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_3+R_2\to R_2]{3R_3+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}1&0&9&-4&-2\\0&0&0&0&0\\0&-1&3&-2&-1\end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,3,4),(0,1,2,3)\}$ یک پایه برای W است. اکنون با استفاده از پایه‌های یافته شده برای U و W یک پایه برای $U+W$ می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&0&1&-4&6\\0&1&-1&2&-1\\1&0&9&-4&-2\\0&-1&3&-2&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_2+R_4\to R_4]{-R_1+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}1&0&1&-4&6\\0&1&-1&2&-1\\0&0&8&0&-8\\0&0&-2&0&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{8}R_3+R_1\to R_1\\ \frac{1}{8}R_3\to R_3}]{\substack{\frac{2}{8}R_3+R_4\to R_4\\ \frac{1}{8}R_3+R_2\to R_2}}\begin{bmatrix}1&0&1&-4&6\\0&1&-1&2&-1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_1\to R_1]{R_3+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}1&0&0&-4&7\\0&1&0&2&-2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

پس $\{(1,0,0,-4,7),(0,1,0,2,-2),(0,0,1,0,-1)\}$ یک پایه برای $U+W$ است. اکنون یک دستگاه همگن می‌یابیم که U فضای جواب آن باشد. ابتدا باید دستگاه همگن

$$\begin{cases}(1,0,1,-4,6)X^\top=0\\(0,1,-1,2,-1)X^\top=0\end{cases}$$

یعنی دستگاه

$$\begin{cases}x_1+x_3-4x_4+6x_5=0\\x_2-x_3+2x_4-x_5=0\end{cases}$$

را حل کنیم. جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=(-x_3+4x_4-6x_5,x_3-2x-4+x_5,x_3,x_4,x_5)\\&=x_3(-1,1,1,0,0)+x_4(4,-2,0,1,0)+x_5(-6,1,0,0,1)\end{aligned}$$

و $\{(-1,1,1,0,0),(4,-2,0,1,0),(-6,1,0,0,1)\}$ پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه است. پس طبق قضیه دستگاهی که U فضای جواب آن است، عبارت است از

$$\begin{cases}(-1,1,1,0,0)X^\top=0\\(4,-2,0,1,0)X^\top=0\\(-6,1,0,0,1)X^\top=0\end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=0\\4x_1-2x_2+x_4=0\\-6x_1+x_2+x_5=0.\end{cases}$$

اکنون یک دستگاه معادله‌ی خطی همگن می‌یابیم که W فضای جواب آن باشد. ابتدا باید دستگاه معادله‌ی خطی همگن

$$\begin{cases}(1,0,9,-4,-2)X^\top=0\\(0,1,-3,2,1)X^\top=0\end{cases}$$

یعنی دستگاه

$$\begin{cases}x_1+9x_3-4x_4-2x_5=0\\x_2-3x_3+2x_4+x_5=0\end{cases}$$

را حل کنیم. جواب دستگاه عبارت است از

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)&=(-9x_3+4x_4+2x_5,3x_3-2x_4-x_5,x_3,x_4,x_5)\\&=x_3(-9,3,1,0,0)+x_4(4,-2,0,1,0)+x_5(2,-1,0,0,1)\end{aligned}$$

و $\{(-9,3,1,0,0),(4,-2,0,1,0),(2,-1,0,0,1)\}$ پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه است. پس طبق قضیه دستگاهی که W فضای جواب آن است، عبارت است از

$$\begin{cases}(-9,3,1,0,0)X^\top=0\\(4,-2,0,1,0)X^\top=0\\(2,-1,0,0,1)X^\top=0\end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases} -9x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

بنابراین جواب دستگاه زیر $U \cap W$ است:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ -9x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

ماترسی ضرایب دستگاه را نوشته و اعمال سطری مقدماتی مناسب روی آن انجام می‌دهیم

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_3 + R_6 \to R_5]{\substack{-R_1 + R_4 \to R_4 \\ -R_2 + R_5 \to R_5}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_4 + R_6 \to R_6 \\ \frac{1}{2}R_4 \to R_4}]{\substack{-\frac{1}{2}R_4 + R_3 \to R_3 \\ R_4 + R_2 \to R_2 \\ -\frac{1}{2}R_4 + R_1 \to R_1}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $x_3 = -3x_1$، $x_4 = 4x_1$، $x_5 = 2x_1$ و $x_2 = 4x_1$ و داریم

$$U \cap V = \{(x_1, 4x_1, -3x_1, 4x_1, 2x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1, 4, -3, 4, 2)\}.$$

۴. ابتدا پایه‌ای برای U می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1 + R_3 \to R_3]{-R_1 + R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 10 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-2R_2 + R_3 \to R_3 \\ -R_2 \to R_2}]{3R_2 + R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\{(1, 0, 11, 7, 6), (0, 1, -5, -2, -3)\}$ یک پایه برای U است. اکنون پایه‌ای برای W می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_2 \to R_2]{\substack{R_2 + R_3 \to R_3 \\ -5R_2 + R_1 \to R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\{(1, 0, -2, 3, -4), (0, 1, -1, 1, 0)\}$ یک پایه برای W است. اکنون با استفاده از پایه‌های یافته شده برای U و W بعد $U + W$ را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_2 + R_4 \to R_4]{-R_1 + R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{4}{13}R_3 + R_4 \to R_4]{\substack{\frac{11}{13}R_3 + R_1 \to R_1 \\ -\frac{5}{13}R_3 + R_2 \to R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{43}{13} & -\frac{32}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{13} & -\frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

بنابراین $\dim(U + W) = 4$. در نتیجه طبق قضیه‌ی گراسمان

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + V) = 2 + 2 - 4 = 0$$

بنابراین $U \cap W = \{0\}$.

۵. طبق قضیه دستگاهی که W فضای جواب آن است، عبارت است از

$$\begin{cases} (1, 4, 0, 9)X^\top = 0 \\ (3, 4, -2, 5)X^\top = 0 \\ (-1, 0, 1, 2)X^\top = 0 \end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases} x_1+4x_2+9x_4=0\\ 3x_1+4x_2-2x_3+5x_4=0\\ -x_1+x_3+2x_5=0.\end{cases}$$

ماتریس ضرایب دستگاه را نوشته و اعمال سطری مقدماتی مناسب روی آن انجام می‌دهیم

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 9\\ 3 & 4 & -2 & 5\\ -1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow[-R_3+R_6\to R_5]{\substack{-R_1+R_4\to R_4\\ -R_2+R_5\to R_5}} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 9\\ 0 & -8 & -2 & -22\\ 0 & 4 & 1 & 11\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_3+R_2\to R_2]{-R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 11\end{bmatrix}$$

بنابراین $x_1=x_3+2x_4$، و $4x_2=-x_3-11x_4$ و جواب دستگاه عبارت است از

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{4}(4x_3+8x_4,-x_3-11x_4,4x_3,4x_4)=\frac{1}{4}x_3(4,-1,4,0)+\frac{1}{4}x_4(8,-11,0,4).$$

بنابراین دستگاهی که مجموعه بردار های داده شده در آن صدق کند عبارتست از

$$\begin{cases} (4,-1,4,0)X^\top=0\\ (8,-11,0,4)X^\top=0\end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+4x_3=0\\ 8x_1-11x_2+4x_4=0.\end{cases}$$

۶. فرض کنید $\{u_1,u_2,\dots,u_k\}$ یک پایه برای U باشد. طبق قضیه‌ی ۲۵.۳ بردارهای $v_1,v_2,\dots,v_m\in V$ وجود دارند به طوری‌که $\{u_1,u_2,\dots,u_k,v_1,v_2,\dots,v_m\}$. قرار می‌دهیم $W=\operatorname{span}\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$. در این صورت $V=U\oplus W$.

۷. طبق فرض داریم $V=U+W$ و $\dim(U+W)=\dim U+\dim W$. پس طبق قضیه‌ی گراسمان داریم

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

و در نتیجه $\dim U\cap W)=\{0\}$. از این‌رو $U\cap W=\{0\}$ و $V=U\oplus W$.

حالت کلی را به استقرا ثابت می‌کنیم. برای $m=2$ در بالا اثبات شد. فرض کنید حکم برای m زیر فضا درست باشد، یعنی اگر V_1، …، V_m زیرفضاهایی از V باشند، به طوری‌که اگر $\dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$، آن‌گاه $V_1+\cdots+V_m=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$. اکنون فرض کنید $m+1$ زیرفضای V_1، …، V_{m+1} زیرفضاهایی از V را داریم به طوری‌که $\dim(V_1+\cdots+V_{m+1})=\dim V_1+\cdots+\dim V_{m+1}$. قرار می‌دهیم $U=V_1+\cdots+V_m$. چون

$\dim U=\dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\cdots+V_m$، طبق فرض استقرا داریم $U=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ و بنابراین (چون $\dim(U+V_{m+1})=\dim U+\dim V_{m+1}$) داریم

$$V_1+\cdots+V_m+V_{m+1}=U+V_{m+1}=U\oplus V_{m+1}=V_1\oplus\cdots\oplus V_m\oplus V_{m+1}.$$

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

حل برخی از تمرین‌ها، ویرایش اول (ممکن است ایراد وجود داشته باشد)

(حل تمرین‌های فصل ۴)

دکتر بیژن طائری
دانشکده‌ی علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی اصفهان

حل تمرین‌های بخش ۱.۴ صفحه‌ی ۱۳۳

۱. (آ) داریم

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(1,0,0) = (3,1,1) = 3e_1 + e_2 + e_3 \\ T(e_2) &= T(0,1,0) = (2,2,1) = 2e_1 + 2e_2 + e_3 \\ T(e_3) &= T(0,0,1) = (-2,1,0) = -2e_1 + e_2 \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس T نسبت به پایه استاندارد $\mathscr{A} = \{e_1, e_2, e_3\}$ عبارت است از

$$A := [T]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب) داریم ماتریس T نسبت به پایه $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,0,1) = (1,0,1) = v_1 \\ T(v_2) &= T(-1,2,1) = (-1,2,1) = v_2 \\ T(v_3) &= T(2,1,1) = (6,3,3) = 3v_3 \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس T نسبت به پایه $\mathscr{B}$ عبارت است از

$$[T]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(پ) مطابق متن درس برای تعیین وارون‌پذیری و یافتن وارون T باید دستگاه $AX = B$ را حل کنیم، که در آن A ماتریس T نسبت به پایه استاندارد است و $B = (a,b,c)^{\top}$. اکنون تعیین می‌کنیم که آیا A وارون‌پذیر است یا نه؟

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3R_1 + R_3 \to R_3]{-R_1 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 + R_3 \to R_3]{-R_2 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3 + R_1 \to R_1]{-R_3 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$$

بنابراین A وارون‌پذیر است و داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه

$$T^{-1}(a,b,c) = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(a - 2b + 2c, -a + 2b + c, -a - b + 4c).$$

(د) کافی است حکم را برای ماتریس $A = [T]_{\mathscr{A}}$ یا $B = [T]_{\mathscr{B}}$ ثابت کنیم:داریم داریم

$$A - I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

و

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$(A - I)(A - 3I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲. فرض کنید $u = (1,0,1)$ و $v = (-1,1,1)$ در این صورت مجموعه‌ی $\{u, v\}$ مستقل خطی است و بنابراین بردار w، مثلاً بردار $w = (1,0,0)$، وجود دارد که $\{u, v, w\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^3$ است. چون هر تبدیل خطی کافی است که روی عناصر یک پایه مشخص باشد پس تبدیل خطی T با خاصیت خواسته شده وجود دارد.

۳. چون A و B مشابه هستند، ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $B = PAP^{-1}$. فرض کنید $\mathscr{A} = \{e_1, \dots, e_n\}$ پایه استاندارد F^n باشد. فرض کنید $\mathscr{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$، که در آن X_i ستون iام P است. چون P وارون‌پذیر است، P ماتریس تبدیل پایه

$\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ در نظر گرفت، یعنی $P=[\mathrm{id}]^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$. بنابراین P^{-1} ماتریس تبدیل پایه $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ است، یعنی $P^{-1}=[\mathrm{id}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}$. فرض کنید T تبدیل خطی وابسته به A باشد، یعنی $TX=AX$. در این صورت $A=[T]^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}}$ و بنابراین طبق مطالب درس

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}}=[\mathrm{id}]^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}\,[T]^{\mathscr{A}}_{\mathscr{A}}\,[\mathrm{id}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{A}}=PAP^{-1}=B.$$

۴. چون X بردار (ستونی) ناصفر است، حداقل یک درایه‌ی ناصفر مثلاً x_k دارد. فرض کنید E_{ij} ماتریسی باشد که درایه‌ی ij ام برابر ۱ و سایر درایه‌های آن است. در این صورت $T(\frac{1}{x_k}E_{ik})=\frac{1}{x_k}E_{ik}X=e_i$ ستون iام ماتریس همانی است. پس همه‌ی بردارهای مولد F^n همگی در $\mathrm{Im}\,(T)$ قرار دارند. بنابراین $\mathrm{Im}\,(T)=F^n$، یعنی T پوشا است.

۵. (آ) ابتدا توجه می‌کنیم که اگر A_j ستون jام A باشد، آن‌گاه $T_Ae_j=Ae_j=A_j$، که در آن e_j ستون jام ماتریس همانی است. هم‌چنین برای هر $X\in F$ داریم $X=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$، که در آن x_i درایه‌ی iام X است. داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(T) &= \{TX \mid X\in F^n\}\\
&= \{T(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) \mid x_1,\ldots,x_n\in F\}\\
&= \{x_1Te_1+\cdots+x_nTe_n \mid x_1,\ldots,x_n\in F\}\\
&= \{x_1A_1+\cdots+x_nA_n \mid x_1,\ldots,x_n\in F\}\\
&= \mathrm{span}\,\{A_1,\ldots,A_n\}.
\end{aligned}$$

بنابراین $\mathrm{Im}\,(T)=\mathrm{span}\,\{A_1,\ldots,A_n\}$ و حکم ثابت است.

(ب) چون

$$\begin{aligned}
X\in\ker(T) &\iff TX=\mathbf{0}\\
&\iff T(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=\mathbf{0}\\
&\iff x_1Te_1+\cdots+x_nTe_n=\mathbf{0}\\
&\iff x_1A_1+\cdots+x_nA_n=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

و T یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر $\ker(T)=\{\mathbf{0}\}$ حکم ثابت است.

۶. ابتدا توجه می‌کنیم که $T^{k+j}=\mathbf{0}$، به ازای هر $j=0,1,2,\ldots$. فرض کنید k کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد که $T^k=\mathbf{0}$، بنابراین $T^{k-1}=\mathbf{0}$. از این‌رو بردار $v\in V$ وجود دارد که $T^{k-1}=v\neq 0$ ادعا می‌کنیم که $\{v,Tv,T^2v,\ldots,T^{k-1}v\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی در V است. فرض کنید

$$c_0v+c_1Tv+c_2T^2v+\cdots+c_{k-1}T^{k-1}v=0$$

در این صورت با اثر دادن T^{k-1} بر طرفین رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
0=T0 &= T^{k-1}(c_0v+c_1Tv+c_2T^2v+\cdots+c_{k-1}T^{k-1}v)\\
&= c_0T^{k-1}v+c_1T^kv+c_2T^{k+2}v+\cdots+c_{k-1}T^{2k-1}v
\end{aligned}$$

$$= c_0T^{k-1}v$$

و چون $T^{k-1}v\neq 0$ داریم $c_0=0$. بنابراین

$$c_1Tv+c_2T^2v+\cdots+c_{k-1}T^{k-1}v=0$$

اکنون با اثر دادن T^{k-2} بر طرفین رابطه‌ی اخیر به صورت مشابه به دست می‌آوریم $c_1=0$ و با ادامه این روند نتیجه می‌شود $c_0=\cdots=c_{k-1}=0$. بنابر این مجموعه‌ی $\{v,Tv,T^2v,\ldots,T^{k-1}v\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی در V است. چون $\dim V=n$ نتیجه می‌گیریم $k\leq n$ بنابراین

$$T^n=T^{n-k+k}=T^{n-k}T^k=0.$$

۷. داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{trace}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}[AB]_{ii}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{ki}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[B]_{ki}[A]_{ik}\\
&= \sum_{k=1}^{n}[BA]_{kk}\\
&= \mathrm{trace}(BA)
\end{aligned}$$

۸. اگر ماتریس‌های $A,B\in M_n(F)$ وجود داشته باشند که $AB-BA=I$، آن‌گاه طبق تمرین قبل داریم

$$n=\mathrm{trace}(I)=\mathrm{trace}(AB-BA)=\mathrm{trace}(AB)-\mathrm{trace}(BA)=0,$$

که تناقض است.

حل تمرین‌های بخش ۲.۴ صفحه‌ی ۱۴۱

۱. ماتریس T نسبت به پایه استاندارد $\mathscr{A}=\{e_1,e_2,e_3\}$ عبارتست از

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 7\end{bmatrix}.$$

باید دستگاه $AX=\mathbf{0}$ را حل کنیم. به سادگی دیده می‌شود جواب دستگاه $x=y$، $z=0$ است. بنابراین

$$\ker(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z)=(0,0,0,0)\}=\{(x,x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}\{(1,1,0)\}.$$

برای یافتن $\operatorname{Im}(T)$ توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(T)=\{TX \mid X\in\mathbb{R}^3\} &= \{T(xe_1+ye_2+ze_3)\mid x,\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \{xTe_1+yTe_2+zTe_3 \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{span}\{Te_1,Te_2,Te_3\}\\ &= \operatorname{span}\{(1,1,1,1),(-1,-1,-1,-1),(1,3,-3,7)\}.\end{aligned}$$

ماتریس مجموعه بردارهای $\{(1,1,1,1),(-1,-1,-1,-1),(1,3,-3,7)\}$ را نسبت به پایه استاندارد می‌نویسیم و با استفاده از اعمال سطری مقدماتی مناسب فرم پلکانی آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&-1&-1\\1&3&-3&7\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&2&-4&6\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&3&-2\\0&1&-2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\operatorname{Im}(T)=\operatorname{span}\{(1,0,3,-2),(0,1,-2,3)\}.$$

۲. (آ) ماتریس T نسبت به پایه استاندارد $\mathscr{A}=\{e_1,e_2,e_3\}$ عبارتست از

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\1&2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

باید دستگاه $AX=\mathbf{0}$ را حل کنیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی داریم

$$A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\1&2&-1\\1&1&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&1&-1\\1&1&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&0&-3\\0&1&-1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

بنابراین $x=y=z=0$، یعنی $X=\mathbf{0}$. پس $\ker(T)=\{(0,0,0)\}$، یعنی T یک‌به‌یک است. بنابراین طبق نتیجه‌ی ۱۳.۴، T پوشا است.

(ب) ماتریس T نسبت به پایه استاندارد $\mathscr{A}=\{e_1,e_2,e_3\}$ عبارتست از

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\1&-3&1\\1&0&4\end{bmatrix}.$$

باید دستگاه $AX=\mathbf{0}$ را حل کنیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی داریم

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\1&-3&1\\1&0&4\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&-2&-2\\0&-3&-3\\1&0&4\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&4\end{bmatrix}$$

بنابراین جواب دستگاه $x=-4z$، $y=-z$ است و در نتیجه

$$\ker(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z)=(0,0,0)\}=\{(-4z,-z,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=\operatorname{span}\{(4,1,1)\}.$$

برای یافتن $\operatorname{Im}(T)$ توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(T)=\{TX \mid X\in\mathbb{R}^3\} &= \{T(xe_1+ye_2+ze_3)\mid x,\in\mathbb{R}^3\}\\ &= \{xTe_1+yTe_2+zTe_3 \mid x,y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{span}\{Te_1,Te_2,Te_3\}\\ &= \operatorname{span}\{(1,1,1),(-2,-3,0),(2,1,4)\}.\end{aligned}$$

ماتریس مجموعه بردارهای $\{(1,1,1),(-2,-3,0),(2,1,4)\}$ را نسبت به پایه استاندارد می‌نویسیم و با استفاده از اعمال سطری مقدماتی مناسب فرم پلکانی آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&-3&0\\2&1&4\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&-1&2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\operatorname{Im}(T)=\operatorname{span}\{(1,0,3),(0,1,-2)\}.$$

۳. (آ) باید دستگاه $AX=\mathbf{0}$ را حل کنیم. با استفاده از اعمال سری مقدماتی داریم

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&-1&3\\-1&1&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین $x=y=z=0$، یعنی $X=\mathbf{0}$. پس $\ker(A)=\{(0,0,0)\}$، یعنی T_A یک‌به‌یک است. بنابراین طبق نتیجه‌ی ۱۳.۴، T_A پوشا است.

(ب) باید دستگاه $AX=\mathbf{0}$ را حل کنیم. با استفاده از اعمال سری مقدماتی داریم

$$A=\begin{bmatrix}-2&0&-1\\3&1&-2\\4&-1&2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&-3\\3&1&-2\\4&-1&2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&-3\\0&-2&7\\0&-5&10\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&1&-3\\0&-2&7\\0&1&-2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

بنابراین $x=y=z=0$، یعنی $X=\mathbf{0}$. پس $\ker(A)=\{(0,0,0)\}$، یعنی T_A یک‌به‌یک است. بنابراین طبق نتیجه‌ی ۱۳.۴، T_A پوشا است.

(پ) باید دستگاه $AX=\mathbf{0}$ را حل کنیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی داریم

$$A=\begin{bmatrix}2&0&-3\\1&1&-2\\3&2&-1\\3&0&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&-2&1\\1&1&-2\\0&-1&5\\0&-3&7\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&0&-9\\1&0&3\\0&1&-5\\0&0&-8\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-5\\0&0&1\end{bmatrix}$$

بنابراین $x=y=z=0$، یعنی $X=\mathbf{0}$. پس $\ker(A)=\{(0,0,0)\}$، یعنی T_A یک‌به‌یک است.

برای یافتن $\mathrm{Im}\,(T)$ با توجه این‌که (e_i ستون iاُم ماتریس همانی است)

$$\mathrm{Im}\,(T_A)=\mathrm{span}\,\{Ae_1,Ae_2,Ae_3\}=\mathrm{span}\,\{(2,1,3,3)^\top,(1,1,2,0)^\top,(-3,-2,-1,1)^\top\}.$$

ماتریس مجموعه بردارهای مولد $\mathrm{Im}\,(T_A)$ را نسبت به پایه استاندارد می‌نویسیم و با استفاده از اعمال سطری مقدماتی مناسب فرم پلکانی آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}2&1&3&3\\1&1&2&0\\-3&2&-1&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&-1&-1&3\\1&1&2&0\\0&4&5&1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&1&1&-3\\1&0&1&3\\0&0&1&13\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&1&0&-16\\1&0&0&-10\\0&0&1&13\end{bmatrix}$$

بنابراین یک پایه برای $\mathrm{Im}\,(T_A)$ عبارتست از

$$\{(0,1,0,-16)^\top,(1,0,0,-10)^\top,(0,0,1,13)^\top\}.$$

(ث) باید دستگاه $AX=\mathbf{0}$ را حل کنیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی داریم

$$A=\begin{bmatrix}4&-1&3\\2&1&-1\\-3&1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&4\\2&1&-1\\-3&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&-9\\0&0&-22\\0&0&0\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}4&-1&3\\2&1&-1\\-3&1&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$$

بنابراین $x=y=z=0$، یعنی $X=\mathbf{0}$. پس $\ker(A)=\{(0,0,0)\}$، یعنی T_A یک‌به‌یک است.

برای یافتن $\mathrm{Im}\,(T)$ با توجه این‌که (e_i ستون iاُم ماتریس همانی است)

$$\mathrm{Im}\,(T_A)=\mathrm{span}\,\{Ae_1,Ae_2,Ae_3\}=\mathrm{span}\,\{(4,12,-3,2)^\top,(-1,1,1,1)^\top,(3,-1,1,-1)^\top\}.$$

ماتریس مجموعه بردارهای مولد $\mathrm{Im}\,(T_A)$ را نسبت به پایه استاندارد می‌نویسیم و با استفاده از اعمال سطری مقدماتی مناسب فرم پلکانی آن‌را می‌یابیم

$$\begin{bmatrix}4&12&-3&2\\-1&1&1&1\\-3&1&1&-1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&16&1&6\\1&-1&-1&-1\\0&-2&-2&2\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0&0&-15&22\\1&0&0&-2\\0&1&1&-1\end{bmatrix}$$

بنابراین یک پایه برای $\mathrm{Im}\,(T_A)$ عبارتست از

$$\{(0,0,-15,22)^\top,(1,0,0,-2)^\top,(0,1,1,-1)^\top\}.$$

۴. هسته T عبارتست از

$$\begin{aligned}\ker T&=\{A\in M_n(F)\mid TA=\mathbf{0}\}\\&=\{A\in M_n(F)\mid A-A^\top=\mathbf{0}\}\\&=\{A\in M_n(F)\mid A^\top=A\}\end{aligned}$$

تصویر T عبارتست از

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,T&=\{B\in M_n(F)\mid \exists A\in M_n(F),\ \ B=TA\}\\&=\{B\in M_n(F)\mid \exists A\in M_n(F),\ \ B=A-A^\top\}\\&=\{B\in M_n(F)\mid B^\top=-B\}\end{aligned}$$

۵. (آ) چون T پوشا است، پس $TV=W$. فرض کنید $\mathscr{A}=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت $\{Tv_1,Tv_2,\dots,Tv_n\}$ فضای $W=TV$ را تولید می‌کند و بنابراین شامل یک پایه برای W است، یعنی $\dim W\le n=\dim V$.

(ب) فرض کنید $\{w_1,\dots,w_k\}$ پایه‌ای برای W باشد. چون T پوشا است به ازای هر $i=1,2,\dots,k$ بردار v_i وجود دارد که $w_i=Tv_i$. اکنون تبدیل خطی $S:W\longrightarrow V$ را با $Sw_i=v_i$، $i=1,\dots,k$ تعریف می‌کنیم. چون به ازای هر $i=1,\dots,k$ داریم

$$TSw_i=Tv_i=w_i$$

پس $TS=\mathrm{id}_W$.

۶. (آ) چون TV زیرفضای W است و $\dim W<\infty$ پس بعد TV متناهی است. فرض کنید $\{w_1,w_2,\dots,w_k\}$ پایه‌ای برای TV باشد. به ازای هر $i=1,2,\dots,k$ بردار v_i وجود دارد که $w_i=Tv_i$. ادعا می‌کنیم که $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ یک مجموعه‌ی مولد برای V است. فرض کنید $v\in V$ در این صورت $Tv\in TV$ و در نتیجه اسکالرهای λ_i وجود دارند که

$$Tv=\lambda_1Tv_1+\cdots+\lambda_kTv_k=T(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k)$$

و یک‌به‌یک بودن T نتیجه می‌دهد $v=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k$ و ادعا ثابت شد. از این‌رو بعد V متناهی است. توجه کنید که $\mathscr{B}$ مستقل خطی نیز هست، زیرا اگر $\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k=0$، آن‌گاه

$$0=T(0)=T(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k)=\lambda_1Tv_1+\cdots+\lambda_kTv_k$$

و در نتیجه $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$ از این‌رو $\mathscr{B}$ یک پایه برای V است.

(ب) فرض کنید $\{w_1,w_2,\dots,w_k\}$ پایه‌ای برای TV باشد. به ازای هر $i=1,2,\dots,k$ بردار v_i وجود دارد که $w_i=Tv_i$.

طبق قضیه بردارهای $u_1,\dots,u_r,\in W$ وجود دارند به طوری‌که $\{w_1,w_2,\dots,w_k\}$ پایه‌ای برای W است. اکنون تبدیل خطی $S:W\longrightarrow V$ را با $Sw_i=v_i$، $i=1,\dots,k$ و $Su_i=0$، $i=1,\dots,r$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که طبق (آ) $\mathscr{B}=\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ یک پایه برای V است. چون به ازای هر $i=1,\dots,k$ داریم

$$STv_i=Sw_i=v_i$$

پس $ST=\mathrm{id}_V$.

۷. فرض کنید $\{X_1,X_2,\dots,X_{n-1}\}$ پایه‌ای برای $\ker A$ باشد. در این صورت طبق اثبات قضیه پوچی + رتبه پایه $\{X_1,X_2,\dots,X_{n-1},X_n\}$ برای F^n وجود دارد، که $\{Y_n\}$ یک پایه برای $\operatorname{Im} A$ است، که در آن $Y_n=AX_n$. اکنون چون $AY_n\in\operatorname{Im} A$ اسکالر λ وجود دارد که $AY_n=\lambda Y_n$. اکنون چون

$$A^2X_i=AAX_i=A\mathbf{0}=\mathbf{0}=\lambda AX_i,\quad =1,2,\dots,n-1,$$
$$A^2X_n=AAX_n=AY_n=\lambda Y_n=\lambda AX_n$$

نتیجه می گیریم که $A^2=\lambda A$.

۸. فرض کنید $\mathscr{A}=\{e_1,\dots,e_n\}$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^n$ باشد. تبدیل خطی T را با $T(e_i)=0$، برای $i=1,\dots,k$ و $T(e_i)=e_i$ برای $i=k+1,\dots,n$، تعریف می کنیم. در این صورت $\{e_1,\dots,e_k\}$ پایه‌ای برای $\ker T$ است. بنابراین $\dim\ker T=k$.

۹. (آ) ابتدا فرض کنید $r=\operatorname{rank}(A)<n$. نشان می‌دهیم ماتریس ناصفر C وجود دارد که $AC=\mathbf{0}$. طبق نتیجه‌ی ۱۵.۴، دستگاه $AX=\mathbf{0}$ دارای جواب نابدیهی $X\neq\mathbf{0}$ است. قرار می‌دهیم $C=[X\ X\ \cdots X]$ در این صورت $\mathbf{0}\neq C\in M_n(F)$ و $AC=\mathbf{0}$.
بر عکس فرض کنید $\mathbf{0}\neq C\in M_n(F)$ وجود داشته باشد که $AC=\mathbf{0}$. فرض کنید C_i ستون iام C باشد. چون $C\neq\mathbf{0}$ و $AC=\mathbf{0}$، پس $1\leq j\leq n$ وجود دارد که $C_j\neq\mathbf{0}$ و $AC_j=\mathbf{0}$. بنابراین دستگاه $AX=\mathbf{0}$ دارای جواب نابدیهی است. از این‌رو طبق نتیجه‌ی ۱۵.۴، $n-r>0$، یعنی $r<n$.

(ب) ابتدا فرض کنید $r=\operatorname{rank}(A)<m$. نشان می‌دهیم ماتریس ناصفر B وجود دارد که $BA=\mathbf{0}$. چون $\operatorname{rank}(A^\top)=\operatorname{rank}(A)<m$ پس طبق قسمت (الف) ماتریس $\mathbf{0}\neq C\in M_m(F)$ وجود دارد که $A^\top C=\mathbf{0}$. از این‌رو $C^\top A=\mathbf{0}$.
بر عکس فرض کنید $\mathbf{0}\neq B\in M_m(F)$ وجود داشته باشد که $BA=\mathbf{0}$. در این صورت $A^\top B^\top=\mathbf{0}$ و در نتیجه طبق قسمت (الف) $\operatorname{rank}(A^\top)<m$، پس $\operatorname{rank}(A)<m$.

۱۰. کافی است نشان دهیم که اگر $T:F^n\longrightarrow F^n$ یک تبدیل خطی وارون‌ناپذیر باشد، آن‌گاه تبدیل خطی $S:F^n\longrightarrow F^n$ وجود دارد که $TS=ST=\mathbf{0}$. فرض کنید $\{u_1,\dots,u_k\}$ پایه‌ای برای هسته‌ی T باشد. در این صورت پایه‌ی $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_r\}$ از V وجود دارد به طوری که $\{w_1\dots,w_r\}$، که در آن $w_i=Tv_i$، پایه‌ای برای $\operatorname{Im}T$ است. پس پایه‌ی $\{w_1,\dots,w_r,y_1,\dots,y_k\}$ از V وجود دارد. تبدیل خطی $S:V\longrightarrow V$ را با Sw_i، $i=1,\dots,r$ و $Sy_i=u_i$، $i=1,\dots,k$، تعریف می کنیم. در این صورت چون

$$STu_i=S(0)=0,\quad i=1,\dots,k\qquad \text{و}\qquad STv_i=Sw_i=0,\quad i=1,\dots,r$$

داریم $ST=\mathbf{0}$ از طرف دیگر چون

$$TSw_i=T(0)=0,\quad i=1,\dots,r\qquad \text{و}\qquad TSy_i=Tu_i=0,\quad i=1,\dots,k$$

داریم $TS=\mathbf{0}$.

۱۱. طبق قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه داریم $m=\operatorname{nul}(R)+\operatorname{rank}(R)$، پس $\operatorname{rank}(R)\leq m$. از طرف دیگر چون $T=RS$ به سادگی دیده می‌شود که $\operatorname{Im}T\subseteq\operatorname{Im}R$ و در نتیجه

$$\operatorname{rank}(T)\leq\operatorname{rank}(R)\leq m<n$$

بنابراین T وارون‌پذیر نیست.

۱۲. چون $T^{n-1}\neq\mathbf{0}$، بردار $v\in V$ وجود دارد که $T^{n-1}v\neq 0$، چون $\{Tv,T^2v,\dots,T^{n-1}\}\subseteq\operatorname{Im}T$ (مشابه حل تمرین ؟) یک مجموعه‌ی مستقل خطی است، پس $\operatorname{rank}(T)\leq n-1$ از طرف دیگر چون T یک‌به‌یک نیست، $\operatorname{rank}(T)\leq n-1$ در نتیجه $\operatorname{rank}(T)=n-1$. برای مثال ماتریس A را که درایه‌های بالای قطر آن ۱ و سایر درایه‌های آن صفر است.

۱۳. ابتدا نشان می‌دهیم که $\operatorname{Im}T\subseteq\ker T$. فرض کنید $w=Tv\in\operatorname{Im}T$، که در آن $v\in V$. چون $T^2=\mathbf{0}$ داریم $Tw=TTv=T^2v=0$ و بنابراین $w\in\ker T$. از این‌رو $\operatorname{Im}T\subseteq\ker T$ و در نتیجه

$$\operatorname{rank}(T)=\dim\operatorname{Im}T\leq\dim\ker T=\operatorname{nul}(T).$$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه داریم

$$n=\operatorname{rank}(T)+\operatorname{nul}(T)\geq\operatorname{rank}(T)+\operatorname{rank}(T)=2\operatorname{rank}(T)$$

و در نتیجه حکم ثابت است.

۱۴. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_k\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)$ باشد. طبق اثبات قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه بردارهای $w_1,\dots,w_r\in F^n$ وجود دارند که $\{v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_r\}$ پایه‌ای برای V است. هم‌چنین $\{u_1,\dots,u_r\}$ پایه‌ای برای $\operatorname{Im}T$ است، که در آن $u_i=Tw_i$. اکنون پایه‌ی $\{e_1,\dots,e_r\}$ از F^r را در نظر می‌گیریم و تبدیل‌های خطی $S:F^n\longrightarrow F^r$ و $R:F^r\longrightarrow F^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Sv_i=0,\ i=1,\dots,k,\quad Sw_i=e_i,\ i=1,\dots,r$$
$$Re_i=u_i,\ i=1,\dots,r$$

در این صورت S پوشا و R یک‌به‌یک است. علاوه بر آن چون

$$RSv_i=R0=0=Tv_i,\ i=1,\dots,k$$
$$RSw_i=Re_i=u_i=Tw_i,\ i=1,\dots,r$$

داریم $RS=T$.

۱۵. ابتدا نشان می‌دهیم $\ker(T)\cap\mathrm{Im}\,(T)=\{0\}$:

$$\begin{aligned} v\in\ker(T)\cap\mathrm{Im}\,(T) &\implies Tv=0 \text{ و } \exists w\in V,\ v=Tw\\ &\implies w=T^2w=TTw=Tv=0\\ &\implies v=Tw=T0=0 \end{aligned}$$

اکنون ازای بردار $v\in V$ داریم $T(v-Tv)=Tv-T^2v=Tv-Tv=0$ و در نتیجه $v-Tv\in\ker(T)$. چون

$$v=Tv+(v-Tv)\in\mathrm{Im}\,(T)+\ker(T)$$

پس $V=\mathrm{Im}\,(T)+\ker(T)$ و حکم ثابت است.

۱۶. توجه کنید که به ازای هر $w\in\mathrm{Im}\,T^2$ بردار $v\in V$ وجود دارد که $w=T^2v$، پس $w=T(Tv)\in\mathrm{Im}\,T$. از این‌رو $\mathrm{Im}\,T^2\subseteq\mathrm{Im}\,T$. بنابراین با استفاده از فرض داریم $\mathrm{Im}\,T^2=\mathrm{Im}\,T$. اکنون فرض کنید $\dim V=n$. با استفاده از قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه و فرض مساله داریم

$$\mathrm{nul}\,(T)=n-\mathrm{rank}(T)=n-\mathrm{rank}(T^2)=\mathrm{nul}\,(T^2).$$

از طرف دیگر به ازای هر $v\in\ker T$ داریم $Tv=0$ و در نتیجه $T^2v=T0=0$، این‌رو $\ker T\subseteq\ker T^2$. بنابراین $\ker(T)=\ker(T^2)$. پس

$$\begin{aligned} v\in\ker(T)\cap\mathrm{Im}\,(T) &\implies Tv=0 \text{ و } \exists w\in V,\ v=Tw\\ &\implies 0=Tv=TTw=T^2w\\ &\implies w\in\ker(T^2)=\ker(T)\\ &\implies v=Tw=0. \end{aligned}$$

۱۷. زنجیر زیر از زیرفضاهای V را داریم

$$\mathrm{Im}\,(T)\supseteq\mathrm{Im}\,(T^2)\supseteq\mathrm{Im}\,(T^3)\supseteq\cdots$$

چون بعد فضای V متناهی است پس کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت k وجود دارد که $\mathrm{Im}\,(T^k)=\mathrm{Im}\,(T^{k+1})$. داریم

$$\mathrm{Im}\,(T^{k+i})=T^{k+i}V=T^i(T^kV)=T^iT^{k+1}V=T^{k+i+1}V=\mathrm{Im}\,(T^{k+i+1})$$

و بنابراین به ازای هر $i=1,2,\dots$، $\mathrm{Im}\,(T^k)=\mathrm{Im}\,(T^{k+i})$. به ویژه $T^k=T^{2k}$ و طبق تمرین قبل $\ker(T^k)\cap\mathrm{Im}\,(T^k)=\{0\}$. اکنون با استفاده از قضیه‌ی گراسمان و قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \dim(\ker T^k+\mathrm{Im}\,T^k) &= \dim\ker(T^k)+\dim\mathrm{Im}\,(T^k)-\dim(\ker T^k\cap\mathrm{Im}\,T^k)\\ &= \dim\ker(T^k)+\dim\mathrm{Im}\,(T^k) \end{aligned}$$

$$= \dim V$$

و در نتیجه $V=\ker T^k+\mathrm{Im}\,T^k$. از این‌رو $V=\ker T^k\oplus\mathrm{Im}\,T^k$.

۱۸. فرض کنید $\{v_1,\dots,v_k\}$ پایه‌ای برای $\ker(T)=\ker(S)$ باشد. طبق اثبات قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه بردارهای $u_1,\dots,u_r\in V$ وجود دارند که $\{v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_r\}$ پایه‌ای برای V است. همچنین $\{Tu_1,\dots,Tu_r\}$ پایه‌ای برای $\mathrm{Im}\,T$ و $\{Su_1,\dots,Su_r\}$ پایه‌ای برای $\mathrm{Im}\,S$ است. بردارهای $x_1,\dots,x_s,y_1,\dots,y_s\in W$ وجود دارند که $\{Tu_1,\dots,Tu_r,x_1,\dots,x_s\}$ و $\{Su_1,\dots,Su_r,y_1,\dots,y_s\}$ دو پایه برای W هستند. اکنون تبدیل خطی $R:W\longrightarrow W$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$RTu_i=Su_i,\ \ i=1,\dots,r,$$
$$Rx_i=y_i,\ \ i=1,\dots,s$$

در این صورت R یک پایه را به یک پایه می‌برد، بنابراین وارون‌پذیر است. از طرف دیگر چون $Sv_i=0=R(0)=RTv_i$، $i=1,\dots,k$ و $RTu_i=Su_i$، $i=1,\dots,r$، پس RT و S روی اعضای یک پایه برابرند. بنابراین $RT=S$.

۱۹. طبق قضیه‌ی ۱۶.۴ داریم

$$\mathrm{rank}(TS)=\mathrm{rank}(S)-\dim(\ker T\cap\mathrm{Im}\,S). \tag{$*$}$$

(آ) اگر S پوشا باشد، آن‌گاه $\mathrm{Im}\,S=W$، یعنی $\mathrm{rank}(S)=m$، و در نتیجه $\ker T\cap\mathrm{Im}\,S=\ker T$. بنابراین از رابطه‌ی ($*$) و قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}(TS) &= \mathrm{rank}(S)-\dim(\ker T\cap\mathrm{Im}\,S)\\ &= m-\dim(\ker T)\\ &= \mathrm{rank}(T) \end{aligned}$$

(ب) فرض کنید T تبدیل خطی وابسته به ماتریس $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ و S تبدیل خطی وابسته به ماتریس $B=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&0\end{bmatrix}$ باشد. در این صورت چون دستگاه $BX=0$ تنها دارای جواب بدیهی است، S یک‌به‌یک است. چون $AB=\mathbf{0}$ نتیجه می‌گیریم $TS=\mathbf{0}$ و در نتیجه $\mathrm{rank}(TS)=0$. توجه کنید که $\mathrm{rank}(T)=1$ و در نتیجه $\mathrm{rank}(TS)\neq\mathrm{rank}(T)$.

(پ) چون $\dim V=\dim W=0$ و $S:V\longrightarrow W$ یک‌به‌یک است، از قضیه پوچی+رتبه نتیجه می‌گیریم S پوشا است. پس طبق (آ) $\mathrm{rank}(TS)=\mathrm{rank}(T)$.

(ت) اگر T یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه $\ker T=\{0\}$ و در نتیجه $\ker T\cap\mathrm{Im}\,S=\{0\}$ و داریم $\dim(\ker T\cap\mathrm{Im}\,S)=0$. بنابراین از رابطه‌ی ($*$) نتیجه می‌شود $\mathrm{rank}(TS)=\mathrm{rank}(S)$.

(ث) ابتدا فرض کنید S پوشا باشد، یعنی $\mathrm{Im}\,S=W$، یعنی $\mathrm{rank}(S)=m$، و $TS=\mathbf{0}$. پس $\ker T\cap\mathrm{Im}\,S=\ker T$ و بنابراین از رابطه‌ی ($*$) و قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه خواهیم داشت

$$0=\mathrm{rank}(S)-\dim(\ker T\cap\mathrm{Im}\,S)=m-\dim\ker T=\mathrm{rank}(T)$$

که نتیجه می‌دهد $T=\mathbf{0}$. (راه دیگر: فرض کنید S پوشا باشد و T تبدیل خطی باشد که $TS=\mathbf{0}$. به ازای هر $w\in W$ بردار $v\in V$ وجود دارد که $w=Sv$. پس $Tw=TSv=0$ و در نتیجه $T=\mathbf{0}$.)

اکنون برعکس فرض کنید از $TS=\mathbf{0}$ نتیجه شود $T=\mathbf{0}$. نشان می‌دهیم S پوشا است. فرض کنید $\{w_1,\ldots,w_k\}$، که در آن $w_i=Sv_i$، پایه‌ای برای $\operatorname{Im} S$ باشد. باید نشان دهیم $k=n$. اگر $k<n$، آن‌گاه بردارهای $x_1,\ldots,x_s\in W$ وجود دارند که $\{w_1,\ldots,w_k,x_1,\ldots,x_s\}$ پایه‌ای برای W است. هم‌چنین با استفاده از اثبات قضیه‌ی پوچی به علاوه‌ی رتبه بردارهای $y_1,\ldots,y_r\in\ker S$ وجود دارند که $\{v_1,\ldots,v_k,y_1,\ldots,y_r\}$ پایه‌ای برای V است. اکنون تبدیل خطی $T:W\longrightarrow V$ را با $Tw_i=0$، $i=1,\ldots,k$ و $Tx_i=x_i$، $i=1,\ldots,s$ تعریف می‌کنیم. در این صورت به ازای هر $i=1,\ldots,k$، داریم $TSv_i=Tw_i=0$ و به ازای هر $i=1,\ldots,r$، داریم $TSy_i=T0=0$. از این‌رو $TS=\mathbf{0}$ و طبق فرض باید داشته باشیم $T=\mathbf{0}$. پس $x_i=Tx_i=0$، که تناقض است. پس $k=n$ و S پوشا است.

(ج) ابتدا فرض کنید T یک‌به‌یک باشد، یعنی $\ker T=\{0\}$، و $TS=\mathbf{0}$. در این صورت $\ker T\cap\operatorname{Im} S=\{0\}$ و بنابراین از رابطه‌ی (*) و قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه خواهیم داشت

$$0=\operatorname{rank}(S)-\dim(\ker T\cap\operatorname{Im} S)=\operatorname{rank}(S)-0=\operatorname{rank}(S)$$

که نتیجه می‌دهد $S=\mathbf{0}$. اکنون برعکس فرض کنید از $TS=\mathbf{0}$ نتیجه شود $S=\mathbf{0}$. نشان می‌دهیم T یک‌به‌یک است. فرض کنید چنین نباشد و $\ker T\neq\{0\}$. در این صورت پایه‌ی $\{w_1,\ldots,w_k\}$ را برای $\ker T$ اختیار می‌کنیم. پایه‌ی $\{w_1,\ldots,w_k\}$ از V را نیز در نظر می‌گیریم. اکنون تبدیل خطی $S:V\longrightarrow W$ را با $Sv_i=w_i$، برای $i=1,\ldots,k$ و $Sv_i=0$، برای $i=k+1,\ldots,n$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $TS=\mathbf{0}$. پس طبق فرض باید داشته باشیم $S=\mathbf{0}$ که تناقض است، زیرا $S\neq\mathbf{0}$. بنابراین T یک به یک است.

(چ) چون $\ker T\cap\operatorname{Im} S\subseteq\ker T$ داریم $\dim(\ker T\cap\operatorname{Im} S)\leq\dim\ker T$ و در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی (*) داریم

$$\operatorname{rank}(S)=\operatorname{rank}(TS)+\dim(\ker T\cap\operatorname{Im} S)\leq\operatorname{rank}(TS)+\dim\ker T$$

(ح) طبق رابطه‌ی (*) داریم $\operatorname{rank}(TS)\leq\operatorname{rank}(S)$. از طرف دیگر داریم $\operatorname{Im}(TS)\subseteq\operatorname{Im} T$، زیرا $TSV\subseteq TW=\operatorname{Im} T$، و در نتیجه $\operatorname{rank}(TS)\leq\operatorname{rank}(T)$. از این‌رو $\operatorname{rank}(TS)\leq\min\{\operatorname{rank}(T),\operatorname{rank}(S)\}$.

(خ) چون $\ker T\cap\operatorname{Im} S\subseteq\ker T$ داریم $\dim(\ker T\cap\operatorname{Im} S)\leq\dim\ker T$ و در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی (*) و قضیه‌ی پوچی بعلاوه رتبه داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(S)&=\operatorname{rank}(TS)+\dim(\ker T\cap\operatorname{Im} S)\\&\leq\operatorname{rank}(TS)+\dim\ker T\\&=\operatorname{rank}(TS)+m-\operatorname{rank}(T)\end{aligned}$$

و در نتیجه $\operatorname{rank}(TS)\geq\operatorname{rank}(S)+\operatorname{rank}(T)-m$.

(د) چون $\ker S\subseteq\ker TS$ داریم $\dim\ker S\leq\dim\ker TS$. اکنون با استفاده از (ج) و قضیه‌ی پوچی بعلاوه‌ی رتبه داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(T)\geq\operatorname{rank}(TS)&\implies n-\operatorname{rank}(T)\leq n-\operatorname{rank}(TS)\\&\implies n-(m-\dim\ker T)\leq\dim\ker TS\end{aligned}$$

$$\implies n-m+\dim\ker T\leq\dim\ker TS.$$

(ذ) چون $\ker TS$ زیرفضای V است، پس $\dim\ker TS\leq n$. اکنون با استفاده از (چ) و قضیه‌ی پوچی بعلاوه‌ی رتبه داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(TS)\geq\operatorname{rank}(T)+\operatorname{rank}(S)-m&\implies n-\dim\ker TS\geq m-\dim\ker T+n-\dim\ker S-m\\&\implies n-\dim\ker TS\geq-\dim\ker T-\dim\ker S\\&\implies \dim\ker TS\leq\dim\ker T+\dim\ker S.\end{aligned}$$

۲۰. (آ) با استفاده از قضیه‌ی گراسمان داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(S+T)&=\dim((S+T)V)\\&=\dim(SV+TV)\\&=\dim(SV)+\dim(TV)-\dim(SV\cap TV)\\&=\operatorname{rank}(S)+\operatorname{rank}(T)-\dim(SV\cap TV)\\&\leq\operatorname{rank}(S)+\operatorname{rank}(T).\end{aligned}$$

(ب) فرض کنید مثلاً $\operatorname{rank}(S)\geq\operatorname{rank}(T)$. طبق (آ) داریم

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(S)&=\operatorname{rank}((S+T)-T)\\&\leq\operatorname{rank}(S+T)+\operatorname{rank}(-T)\\&=\operatorname{rank}(S+T)+\operatorname{rank}(T)\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\operatorname{rank}(S)-\operatorname{rank}(T)\leq\operatorname{rank}(S+T)$$

حل تمرین‌های بخش ۳.۴ صفحه‌ی ۱۴۹

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

حل برخی از تمرین‌ها، ویرایش اول (ممکن است ایراد وجود داشته باشد)

(حل تمرین‌های فصل ۵)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

۱.۰ حل تمرین‌های بخش ۲.۵ صفحه‌ی ۱۷۳

۱. فرض کنید T وارون‌پذیر و $m(x) = x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ چندجمله‌ای می‌نیمال T باشد.

۲. بردار ناصفر $v \in V$ را در نظر می‌گیریم. طبق فرض اسکالر λ وجود دارد که $Tv = \lambda v$. نشان می‌دهیم به ازای هر $0 \neq w \in V$، $Tw = \lambda w$. اگر $w \in \operatorname{span}\{v\}$، آن‌گاه اسکالر μ وجود دارد که $w = \mu v$ و در نتیجه $Tw = T(\mu v) = \mu T(v) = \mu\lambda v = \lambda w$. پس فرض کنید $w \notin \operatorname{span}\{v\}$. بنابراین $\{v, w\}$ مستقل خطی است. طبق فرض اسکالرهای μ و α وجود دارند که $Tw = \mu w$ و $T(v+w) = \alpha(v+w)$. پس

$$\alpha(v+w) = T(v+w) = Tv + Tw = \lambda v + \mu w \Longrightarrow (\alpha-\lambda)v + (\alpha-\mu)w = 0 \Longrightarrow \alpha = \lambda,\ \alpha = \mu.$$

۳. فرض کنید A ماتریس قطری شدنی باشد که مقادیر ویژه آن ۰ یا ۱ هستند. در این صورت ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $P^{-1}AP = D$، که در آن $D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ یک ماتریس قطری است که روی قطر آن ۱ و ۰ است. توجه کنید $D^2 = D$، یعنی D ماتریس خودتوان است. اکنون داریم

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

و در نتیجه A خودتوان است. **۴.** (آ) فرض کنید $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. چون λ یک مقدار ویژه ی T است، بردار ناصفر $v \in V$ وجود دارد که $Tv = \lambda v$. به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ به صورت استقرایی داریم

$$T^k v = T^{k-1}(Tv) = T^{k-1}(\lambda v) = \lambda T^{k-1}(v) = \lambda\lambda^{k-1}(v) = \lambda^k v.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(T)v &= (a_n T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 \mathrm{id})v \\ &= a_n T^n v + a_{n-1}T^{n-1}v + \cdots + a_1 Tv + a_0 \mathrm{id} v \\ &= a_n \lambda^n v + a_{n-1}\lambda v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v \\ &= (a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda + \cdots + a_1\lambda + a_0)v \\ &= f(\lambda)v \end{aligned}$$

و حکم ثابت است.

(ب) چون λ یک مقدار ویژه ی T است، بردار ناصفر $v \in V$ وجود دارد که $Tv = \lambda v$. از این‌رو $v = T^{-1}(\lambda v) = \lambda T^{-1}(v)$ و بنابراین $\lambda^{-1}v = T^{-1}(v)$ و حکم ثابت است. **۵.** **۶.** چون A پوچ‌توان است، $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $A^k = \mathbf{0}$ و $A^{k-1} \neq \mathbf{0}$. فرض کنید λ یک مقدار ویژه A باشد. طبق تمرین ۴، λ^k یک مقدار ویژه‌ی $A^k = \mathbf{0}$ است. در نتیجه $\lambda^k = 0$، یعنی $\lambda = 0$.

۷. چون A دارای n مقدار ویژه‌ی متمایز است، پس A قطری شدنی است و بعد زیرفضای ویژه متناظر هر مقدار ویژه از A برابر ۱ است. فرض کنید λ یک مقدار ویژه از A متناظر بردار ویژه‌ی X باشد. اگر $BX = \mathbf{0}$، آن‌گاه X بردار ویژه‌ای از B متناظر مقدار ویژه‌ی ۰ است. اگر $BX = \mathbf{0}$، آن‌گاه با توجه به این که $AB = BA$ داریم

$$AX = \lambda X \Longrightarrow BAX = \lambda BX \Longrightarrow ABX = \lambda BX.$$

بنابراین BX نیز یک بردار ویژه متناظر λ از A است. در نتیجه اسکالر α وجود دارد که $BX = \alpha X$، یعنی X یک بردار ویژه از B نیز هست. پس در هر حالت هر بردار ویژه از A بردار ویژه‌ای از B نیز هست. چون پایه‌ی $\mathscr{B}$ از F^n متشکل از بردارهای ویژه‌ی A وجود دارد، پس $\mathscr{B}$ یک پایه‌ی F^n متشکل از بردارهای ویژه‌ی B است. بنابراین B قطری شدنی است.

راه دوم:

چون A دارای n مقدار ویژه‌ی متمایز است پس A قطری شدنی است. بنابراین ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $P^{-1}AP = D$، که در آن $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ یک ماتریس قطری است. چون $AB = BA$ داریم $P^{-1}ABP = P^{-1}BAP$ و در نتیجه $P^{-1}APP^{-1}BP = P^{-1}BPP^{-1}AP$، یعنی $DC = CD$، که در آن $C = P^{-1}BP$. بنابراین کافی است نشان دهیم که C یک ماتریس قطری است. چون به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ داریم

$$[DC]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[D]_{ik}[C]_{kj} = \lambda_i[C]_{ij} \quad \text{و} \quad [CD]_{ij} = \sum_{k=1}^{n}[C]_{ik}[D]_{kj} = [B]_{ij}\lambda_j$$

پس $\lambda_i[B]_{ij} = [B]_{ij}\lambda_j$، یعنی $(\lambda_i - \lambda_j)[B]_{ij} = 0$. با توجه به این‌که به ازای هر $i \neq j$، $\lambda_i \neq \lambda_j$ خواهیم داشت $[C]_{ij} = 0$ به ازای هر $i \neq j$. از این‌رو C یک ماتریس قطری است.

۸. طبق فرض داریم $f\left(\frac{r}{s}\right) = 0$، بنابراین

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{r}{s}\right) = 0 \iff & a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_0 = 0 \\
\iff & a_n\frac{r^n}{s^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{r}{s} + a_0 = 0 \\
\iff & a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}s + \cdots + a_1\, rs^{n-1} + a_0 s^n = 0 \\
\iff & a_{n-1}r^{n-1}s + \cdots + a_1\, rs^{n-1} + a_0 s^n = -a_n r^n.
\end{aligned}$$

چون $a_{n-1}r^{n-1}s + \cdots + a_1\, rs^{n-1} + a_0 s^n = -a_n r^n$ و s طرف چپ را می‌شمارد، پس s طرف چپ، یعنی $-a_n r^n$ را می‌شمارد. چون s و r نسبت به هم اول هستند، s باید a_n را بشمارد. به همین ترتیب چون $a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1}s + \cdots + a_1\, rs^{n-1} = -a_0 s^n$ و r طرف چپ را می‌شمارد، پس r طرف چپ، یعنی $-a_0 s^n$ را می‌شمارد. چون r و s نسبت به هم اول هستند، r باید a_0 را بشمارد.

۹. ماتریس T نسبت به پایه‌ی استاندارد عبارتست از

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) = \det(xI - A) &= \begin{vmatrix} x+3 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & x-3 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & x & -1 \\ -1 & -2 & -2 & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+3 & -2x+3 & 3-x & -x-1 \\ -2 & x+1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & x+1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+2 & -2x+3 & -x-1 & 0 \\ -2 & x+1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & x+1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+1 & -2x+2 & 0 & 0 \\ -2 & x+1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & x+1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & x+1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & x+1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\
&= (x+5)(x+1)^3.
\end{aligned}$$

بنابراین مقادیر ویژه A عبارتند از ۵− و ۱−. بردارهای ویژه متناظر ۱− را می‌یابیم

$$(A+I)V = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

دستگاه هم‌ارز با دستگاه بالا عبارت است (با انجام اعمال سطری-مقدماتی مناسب)

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

بنابراین $v_2 = v_3 = 0$ و $v_{=} - v_4$. در نتیجه بعد فضای ویژه متناظر ۱− (تکرار هندسی) برابر یک است، در حالی‌که تکرار جبری ۱− برابر سه است. پس تبدیل خطی داده شده قطری شدنی نیست.

۱۰. (آ) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی مناسب می‌توان چندجمله‌ای سرشت‌نما را محاسبه کرد. چون اضافه کردن مضربی از یک سطر (یا یک ستون) به سطر (یا ستون) دیگر، مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد، داریم

$$\begin{aligned}
\det(xI-A) &= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & -5 & x-3 \end{vmatrix} \quad (R_1+R_2\to R_2) \\
&= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ x-1 & x-1 & 0 \\ -1 & -5 & x-3 \end{vmatrix} \quad (-C_2+C_2\to C_2) \\
&= \begin{vmatrix} x & -x-1 & -1 \\ x-1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & x-3 \end{vmatrix} \\
&= -(x-1)\begin{vmatrix} -x-1 & -1 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} \\
&= -(x-1)((-x-1)(x-3)-4) = (x-1)(-x^2+2x-1) \\
&= (x-1)^3
\end{aligned}$$

پس $\lambda = 1$ تنها مقدار ویژه‌ی A است. برای یافتن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 1$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A-I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_3/2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا فقط دو معادله‌ی $-x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0$ و $2x_1 + 3x_3 = 0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 1$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}x_3\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = 1$ عبارت است از

$$\ker(A-I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = X\} = \operatorname{span}\{(2,-4,6)^\top\}.$$

چون سه بردار ویژه‌ی مستقل خطی برای A وجود ندارد پس A قطری شدنی نیست.

(ب) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی مناسب می‌توان چندجمله‌ای سرشت‌نما را محاسبه کرد. چون اضافه کردن مضربی از یک سطر (یا یک ستون) به سطر (یا ستون) دیگر، مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد، داریم

$$\begin{aligned}
\det(xI-A) &= \begin{vmatrix} 2+x & -3 & -1 \\ 0 & -1+x & -1 \\ 3 & -4 & -1+x \end{vmatrix} \quad (R_1+R_2\to R_2) \\
&= \begin{vmatrix} 2+x & -3 & -1 \\ -2-x & 2+x & 0 \\ 3 & -4 & -1+x \end{vmatrix} \quad (C_1+C_2\to C_2) \\
&= \begin{vmatrix} 2+x & -1+x & -1 \\ -2-x & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1+x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب سطر دوم}) \\
&= -(-2-x)\begin{vmatrix} -1+x & -1 \\ -1 & -1+x \end{vmatrix} \\
&= -(-2-x)((-1+x)(-1+x)-1) \\
&= x(x-2)(x+2)
\end{aligned}$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از $\lambda = 0$، $\lambda = 2$ و $\lambda = -2$. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. برای یافتن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 0$، باید دستگاه $AX = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{-R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2/2 \to R_2]{R_2+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+R_1 \to R_1]{R_2+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا فقط دو معادله‌ی $x_2 + x_3 = 0$ و $x_1 + x_3 = 0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 0$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = 0$ عبارت است از

$$\ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = \mathbf{0}\} = \operatorname{span}\{(-1,-1,0)^\top\}.$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 2$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A-2I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-2I)X = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+R_3 \to R_3]{-R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2/4 \to R_2]{R_2+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا معادله‌ی سوم ضریبی از معادله‌ی دوم است. پس فقط دو معادله‌ی $-x_2 + x_3 = 0$ و $x_1 - x_2 = 0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 2$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = 2$ عبارت است از

$$\ker(A-2I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 2X\} = \operatorname{span}\{(1,1,1)^\top\}.$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = -2$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A+2I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+I)X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_1+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا معادله‌های اول و سوم یکی هستند. پس فقط دو معادله‌ی $3x_2 + x_3 = 0$ و $-3x_1 - 5x_2 = 0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda = -2$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}x_2 \\ x_2 \\ -3x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = -2$ عبارت است از

$$\ker(A+2I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = -2X\} = \operatorname{span}\{(-5,3,9)^\top\}.$$

بنابراین ماتریس A قطری شدنی است و ماتریس P که $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(0,2,-2)$ عبارت است از (ستون‌های P بردارهای ویژه هستند)

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}.$$

(پ) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی مناسب می‌توان چندجمله‌ای سرشت‌نما را محاسبه کرد. چون اضافه کردن مضربی از یک سطر (یا یک ستون) به سطر (یا ستون) دیگر، مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد، داریم

$$\det(xI-A) = \begin{vmatrix} 5+x & -3 & 0 \\ 6 & -4+x & -2 \\ -2 & 1 & -1+x \end{vmatrix} = -(-1+x)x(1+x)$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از $\lambda=0$، $\lambda=2$ و $\lambda=-2$. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. (ت)

$$\begin{aligned}
\det(xI-A) &= \begin{vmatrix} -3+x & -2 & 2 \\ -4 & -1+x & 2 \\ -8 & -4 & 5+x \end{vmatrix} \quad (C_3+C_2 \to C_2) \\
&= \begin{vmatrix} -3+x & 0 & 2 \\ -4 & 1+x & 2 \\ -8 & 1+x & 5+x \end{vmatrix} \quad (-R_3+R_2 \to R_2) \\
&= \begin{vmatrix} -3+x & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -3-x \\ -8 & 1+x & 5+x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب ستون دوم}) \\
&= -(1+x)\begin{vmatrix} -3+x & 2 \\ 4 & -3-x \end{vmatrix} \\
&= -(x+1)((x-3)(-x-3)-8) \\
&= (-1+x)(1+x)^2
\end{aligned}$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از $\lambda=1$ و $\lambda=-1$. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda=1$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X=\mathbf{0}$، یعنی $(A-I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-I)X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 8 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4R_1+R_3 \to R_3]{-2R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1/2 \to R_1]{\substack{R_2+R_1 \to R_1 \\ -R_2/2 \to R_2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا معادله‌ی سوم ضریبی از معادله‌ی اول است. فقط دو معادله‌ی $x_1-x_3=0$ و $2x_2-x_3=0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=1$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda=1$ عبارت است از

$$\ker(A-I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = X\} = \operatorname{span}\{(2,1,1)^\top\}.$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-1$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X=\mathbf{0}$، یعنی $(A+I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+I)X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 8 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. در دستگاه بالا سه معادله ضریبی از یکدیگر هستند و فقط یک معادله‌ی $2x_1+x_2-x_3=0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-1$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1+x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda=-1$ عبارت است از

$$\ker(A+I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = -X\} = \operatorname{span}\{(1,0,2)^\top, (0,1,1)^\top\}.$$

بنابراین ماتریس A قطری شدنی است و ماتریس P که $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(1,-1,-1)$ عبارت است از (ستون‌های P بردارهای ویژه هستند)

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ث) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی مناسب می‌توان چندجمله‌ای سرشت‌نما را محاسبه کرد. چون اضافه کردن مضربی از یک سطر (یا یک ستون) به سطر (یا ستون) دیگر، مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد، داریم

$$\det(xI-A) = \begin{vmatrix} 1+x & -2 & -2 \\ -2 & 1+x & -2 \\ -2 & -2 & 1+x \end{vmatrix} \quad (-C_3+C_2 \to C_2)$$

$$= \begin{vmatrix} ۱+x & ۰ & -۲ \\ -۲ & ۳+x & -۲ \\ -۲ & -۳-x & ۱+x \end{vmatrix} \quad (R_۳+R_۲\to R_۲)$$

$$= \begin{vmatrix} ۱+x & ۰ & -۲ \\ -۴ & ۰ & -۱+x \\ -۲ & -۳-x & ۱+x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب ستون دوم})$$

$$= -(-۳-x)\begin{vmatrix} ۱+x & -۲ \\ -۴ & -۱+x \end{vmatrix}$$

$$= -(-x-۳)((x+۱)(x-۱)-۸)$$

$$= (-۳+x)(۳+x)^۲$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از $\lambda = ۳$ و $\lambda = -۳$. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = ۳$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A-۳I)X = \mathbf{0}$)، یعنی دستگاه

$$(A-۳I)X = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۴ \end{bmatrix} \xrightarrow[۲R_۱+R_۳\to R_۳]{-R_۱+R_۲\to R_۲} \begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & -۶ & ۰ \\ -۶ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_۲/۶\to R_۲} \begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ -۶ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{۴R_۲+R_۱\to R_۱} \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ -۶ & ۶ & ۰ \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا معادله‌ی سوم ضریبی از معادله‌ی دوم است. فقط دو معادله‌ی $-۲x_۲+۲x_۳=۰$ و $x_۱-x_۲=۰$ را داریم و بنابراین $x_۱=x_۲=x_۳$. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=۳$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۱ \\ x_۱ \end{bmatrix} = x_۱\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = ۳$ عبارت است از

$$\ker(A-۳I) = \{X\in\mathbb{R}^۳ \mid AX = ۳X\} = \mathrm{span}\,\{(۱,۱,۱)^\top\}.$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = -۳$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A+۳I)X = \mathbf{0}$)، یعنی دستگاه

$$(A+۳I)X = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. در دستگاه بالا سه معادله یکی هستند، پس فقط یک معادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳=۰$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-۳$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ -x_۱-x_۲ \end{bmatrix} = x_۱\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix} + x_۲\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = -۳$ عبارت است از

$$\ker(A+۳I) = \{X\in\mathbb{R}^۳ \mid AX = -۳X\} = \mathrm{span}\,\{(۱,۰,-۱)^\top, (۰,۱,-۱)^\top\}.$$

بنابراین ماتریس A قطری شدنی است و ماتریس P که $P^{-۱}AP = \mathrm{diag}\,(۳,-۳,-۳)$ عبارت است از (ستون‌های P بردارهای ویژه هستند)

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}.$$

(ج) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی مناسب می‌توان چندجمله‌ای سرشت‌نما را محاسبه کرد. چون اضافه کردن مضربی از یک سطر (یا یک ستون) به سطر (یا ستون) دیگر، مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد، داریم

$$\det(xI-A) = \begin{vmatrix} -۱+x & -۳ & -۶ \\ ۳ & ۵+x & ۶ \\ -۳ & -۳ & -۴+x \end{vmatrix} \quad (R_۱+R_۲\to R_۲)$$

$$= \begin{vmatrix} -۱+x & -۳ & -۶ \\ ۲+x & ۲+x & ۰ \\ -۳ & -۳ & -۴+x \end{vmatrix} \quad (-C_۱+C_۲\to C_۲)$$

$$= \begin{vmatrix} -۱+x & -۲-x & -۶ \\ ۲+x & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۰ & -۴+x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب ستون دوم})$$

$$\begin{aligned} &= -(-2-x)\begin{vmatrix} 2+x & 0 \\ -3 & -4+x \end{vmatrix} \\ &= (-4+x)(2+x)^2 \end{aligned}$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از $\lambda = 4$ و $\lambda = -2$. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 4$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A-4I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-4I)X = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -3 & -9 & -6 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -3 & -9 & -6 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+R_3 \to R_3]{-R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & -12 & -12 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_1/3 \to R_1]{-R_2/12 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا معادله‌ی سوم ضریبی از معادله‌ی دوم است. فقط دو معادله‌ی $x_1 - x_3 = 0$ و $x_2 + x_3 = 0$ را داریم . در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 4$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = 4$ عبارت است از

$$\ker(A-4I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = 4X\} = \operatorname{span}\{(-1,-1,0)^\top\}.$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = -2$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A+2I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+2I)X = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -3 & -3 & -6 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. در دستگاه بالا سه معادله یکی هستند، پس فقط یک معادله‌ی $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda = -2$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = -2$ عبارت است از

$$\ker(A+2I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = -2X\} = \operatorname{span}\{(-1,1,0)^\top, (-2,0,1)^\top\}.$$

بنابراین ماتریس A قطری شدنی است و ماتریس P که $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(4,-2,-2)$ عبارت است از (ستون‌های P بردارهای ویژه هستند)

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(چ) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی مناسب می‌توان چندجمله‌ای سرشت‌نما را محاسبه کرد. چون اضافه کردن مضربی از یک سطر (یا یک ستون) به سطر (یا ستون) دیگر، مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد، داریم

$$\begin{aligned} \det(xI-A) &= \begin{vmatrix} -3+x & -1 & -2 & 1 \\ -3 & -2+x & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 2+x \end{vmatrix} \quad (-R_1+R_4 \to R_4) \\ &= \begin{vmatrix} -3+x & -1 & -2 & 1 \\ -3 & -2+x & -3 & 1 \\ -2+x & 0 & -1+x & 1 \\ -1-x & 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix} \quad (C_2+C_4 \to C_4) \\ &= \begin{vmatrix} -3+x & -1 & -2 & -2+x \\ -3 & -2+x & -3 & -2 \\ -2+x & 0 & -1+x & -1+x \\ -1-x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (-C_4+C_3 \to C_3) \\ &= \begin{vmatrix} -3+x & -1 & -x & -2+x \\ -3 & -2+x & -1 & -2 \\ -2+x & 0 & 0 & -1+x \\ -1-x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب سطر چهارم}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(-1-x)\begin{vmatrix} -1 & -x & -2+x \\ -2+x & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1+x \end{vmatrix} \quad \text{(بسط لاپلاس بر حسب سطر سوم)}\\
&= (x+1)(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -x \\ -2+x & -1 \end{vmatrix}\\
&= (x+1)(x-1)(1+x(x-2))\\
&= (x-1)^3(x+1)
\end{aligned}
$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از $\lambda = 1$ و $\lambda = -1$. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 1$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A-I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$
(A-I)X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{3R_3+R_2\to R_2 \\ 4R_3+R_4\to R_4}]{2R_3+R_1\to R_1}
\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{-R_1+R_3\to R_3 \\ -3R_1+R_4\to R_4}]{-2R_1+R_2\to R_2}
\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{2R_2+R_1\to R_1}
\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

در دستگاه بالا فقط سه معادله‌ی $-x_2+x_4=0$، $x_3+x_4=0$ و $-x_1+x_4=0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=1$

عبارتند از

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = 1$ عبارت است از

$$
\ker(A-I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = X\} = \operatorname{span}\{(1,1,-1,1)^\top\}.
$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-1$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X=\mathbf{0}$، یعنی $(A+I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$
(A+I)X = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$
\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}
\xrightarrow[\substack{3R_3+R_2\to R_2 \\ 4R_3+R_4\to R_4}]{4R_3+R_1\to R_1}
\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-R_1+R_4\to R_4}
\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{-R_2+R_1\to R_1}
\begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

در دستگاه بالا فقط سه معادله‌ی $-3x_2-x_3=0$، $3x_3-x_4=0$ و $-x_1+x_2=0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-1$ عبارتند از

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 3x_2 \\ 9x_2 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}.
$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = -1$ عبارت است از

$$\ker(A+I) = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = -X\} = \operatorname{span}\{(1,1,3,3)^\top\}.$$

چون چهار بردار ویژه‌ی مستقل خطی برای A وجود ندارد پس A قطری شدنی نیست.

(ح) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. با استفاده از اعمال سطری مقدماتی و ستونی مقدماتی مناسب می‌توان چندجمله‌ای سرشت‌نما را محاسبه کرد. چون اضافه کردن مضربی از یک سطر (یا یک ستون) به سطر (یا ستون) دیگر، مقدار دترمینان را تغییر نمی‌دهد، داریم

$$\begin{aligned}
\det(xI-A) &= \begin{vmatrix} x & -7 & 4 & 7 \\ -4 & 6+x & -4 & -4 \\ -2 & 11 & -6+x & -11 \\ 4 & -4 & 4 & 6+x \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} -C_1+C_3 \to C_3 \\ C_1+C_2 \to C_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x & -7+x & 4-x & 7 \\ -4 & 2+x & 0 & -4 \\ -2 & 9 & -4+x & -11 \\ 4 & 0 & 0 & 6+x \end{vmatrix} \quad (R_1+R_3 \to R_3) \\
&= \begin{vmatrix} x & -7+x & 4-x & 7 \\ -4 & 2+x & 0 & -4 \\ -2+x & 2+x & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 6+x \end{vmatrix} \quad (-R_2+R_3 \to R_3) \\
&= \begin{vmatrix} x & -7+x & 4-x & 7 \\ -4 & 2+x & 0 & -4 \\ 2+x & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 6+x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب ستون سوم}) \\
&= (4-x)\begin{vmatrix} -4 & 2+x & -4 \\ 2+x & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6+x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب ستون دوم}) \\
&= -(4-x)(2+x)\begin{vmatrix} 2+x & 0 \\ 4 & 6+x \end{vmatrix} \\
&= (-x+4)(-(x+2)(x+2)(x+6)) \\
&= (x-4)(x+2)^2(x+6)
\end{aligned}$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از $\lambda = 4$، $\lambda = -2$ و $\lambda = -6$. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. برای به دست آوردن بردارهای ویژه

متناظر $\lambda = 4$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A-4I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-4I)X = \begin{bmatrix} -4 & 7 & -4 & -7 \\ 4 & -10 & 4 & 4 \\ 2 & -11 & 2 & 11 \\ -4 & 4 & -4 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -4 & 7 & -4 & -7 \\ 4 & -10 & 4 & 4 \\ 2 & -11 & 2 & 11 \\ -4 & 4 & -4 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_3+R_4 \to R_4}]{\substack{2R_3+R_1 \to R_1 \\ -2R_3+R_2 \to R_2}} \begin{bmatrix} 0 & -15 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 0 & -18 \\ 2 & -11 & 2 & 11 \\ 0 & -18 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\;\to R_1 - R_1/15\;} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -18 \\ 2 & -11 & 2 & 11 \\ 0 & -18 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{18R_1+R_4 \to R_4}]{\substack{-12R_1+R_2 \to R_2 \\ 11R_1+R_3 \to R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

از دستگاه بالا نتیجه می‌گیریم که $x_4 = 0$، $x_2 = 0$ و $x_1 + x_3 = 0$. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda = 4$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda = 4$ عبارت است از

$$\ker(A-4I) = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = 4X\} = \operatorname{span}\{(1,0,1,-1)^\top\}.$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda = -6$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X = \mathbf{0}$، یعنی $(A+6I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+6I)X = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & -7 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -11 & 12 & 11 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & -7 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -11 & 12 & 11 \\ -4 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_3+R_4 \to R_4}]{\substack{-3R_3+R_1 \to R_1 \\ -2R_3+R_2 \to R_2}} \begin{bmatrix} 0 & 40 & -40 & -40 \\ 0 & 22 & -20 & -18 \\ 2 & -11 & 12 & 11 \\ 0 & -18 & 20 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\to R_1 R_1/40} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 22 & -20 & -18 \\ 2 & -11 & 12 & 11 \\ 0 & -18 & 20 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{18R_1+R_4 \to R_4}]{\substack{-22R_1+R_2 \to R_2 \\ 11R_1+R_3 \to R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_4 \to R_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/2+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا فقط سه معادله‌ی $x_2+x_4=0$، $2x_2+x_3=0$ و $2x_1+x_3=0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-6$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda=-6$ عبارت است از

$$\ker(A+6I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = \mathbf{0}\} = \mathrm{span}\,\{(1,1,2,-1)^\top\}.$$

برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-2$، باید دستگاه $(A-\lambda I)X=\mathbf{0}$، یعنی $(A+2I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+2I)X = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 & -7 \\ 4 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & -11 & 8 & 11 \\ -4 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 & -7 \\ 4 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & -11 & 8 & 11 \\ -4 & 4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_1+R_4 \to R_4}]{\substack{-2R_1+R_2 \to R_2 \\ -R_1+R_3 \to R_3}} \begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 & -7 \\ -2 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -18 & 12 & 18 \\ 0 & 18 & -12 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-R_3/18 \to R_3}]{\substack{R_1+R_2 \to R_2 \\ R_3+R_4 \to R_4}} \begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 & -7 \\ -2 & -7 & 4 & 7 \\ 0 & -18 & 12 & 18 \\ 0 & 18 & -12 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-7R_3+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در دستگاه بالا فقط دو معادله‌ی $2x_1+\frac{2}{3}x_3=0$ و $x_2-\frac{2}{3}x_3-x_4=0$ را داریم. در نتیجه بردارهای ویژه متناظر $\lambda=-2$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_3+x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس فضای ویژه متناظر $\lambda=-2$ عبارت است از

$$\ker(A+2I) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = -2X\} = \mathrm{span}\,\{(-1,2,3,0)^\top, (0,1,0,1)^\top\}.$$

بنابراین ماتریس A قطری شدنی است و ماتریس P که $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\,(4,-6,-2,-2)$ عبارت است از (ستون‌های P بردارهای ویژه هستند)

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

۱۱. چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم

$$\det(xI-A)=\begin{vmatrix}x+7 & -10\\ 5 & x-8\end{vmatrix}=x^2-x-56+50=x^2-x+6=(x+2)(x-3).$$

پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از ۲− و ۳. بردار ویژه X_1 متناظر $\lambda=-2$ و بردار ویژه X_2 متناظر $\lambda=3$ عبارتند از

$$X_1=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

بنابراین $P^{-1}AP=D$، که در آن

$$P=\begin{bmatrix}2&1\\ 1&1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D=\begin{bmatrix}-2&0\\ 0&3\end{bmatrix}.$$

چون $A=PDP^{-1}$ نتیجه می‌گیریم $A^n=(PDP^{-1})^n=PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1}=PD^nP^{-1}$. بنابراین

$$\begin{aligned}A^n &= PDP^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}2&1\\ 1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n2^n&0\\ 0&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\ -1&2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(-1)^n2^{n+1}&3^n\\ (-2)^n&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\ -1&2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}(-1)^n2^{n+1}-3^n & -(-1)^n2^{n+1}+2\times 3^n\\ (-2)^n-3^n & -(-2)^n+2\times 3^n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

۱۲. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\det(-AB)=(-1)^n\det(A)\det(B)=(-1)^n\det(B)\det(A)=\det(-BA).$$

بنابراین برای $x=0$ حکم درست است. پس فرض می‌کنیم $x\neq 0$. قرار می‌دهیم $T=\begin{bmatrix}I&A\\ B&xI\end{bmatrix}$. چون I وارون‌پذیر است داریم

$$\det(T)=\begin{vmatrix}I&A\\ B&xI\end{vmatrix}=\det(I)\det(xI-BI^{-1}A)=\det(xI-BA)$$

و چون I وارون‌پذیر است داریم

$$\det(T)=\begin{vmatrix}I&A\\ B&xI\end{vmatrix}=\det(xI)\det(I-A(xI)^{-1}B)=\det(xI-AB)$$

۱۳. فرض کنید D ماتریس بلوکی صورت مساله باشد. با استفاده از اعمال بلوکی، ضرب ستون بلوک دوم در ۱− و جمع آن با ستون بلوک اول و سپس جمع سطر بلوک اول با سطر بلوک دوم، داریم

$$\begin{aligned}\det(xI-D) &= \begin{vmatrix}xI-A & -B\\ -B & xI-A\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}xI-A+B & -B\\ -B-xI+A & xI-A\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}xI-A+B & -B\\ \mathbf{0} & xI-A-B\end{vmatrix}\\ &= \det(xI-(A-B))\det(xI-(A+B)).\end{aligned}$$

۱۴. فرض کنید A ماتریس داده شده در صورت مساله باشد. اگر بردار $X=(x_1,\dots,x_n)^\top$ برداری باشد که $AX=\mathbf{0}$، آن‌گاه

$$\begin{cases}nx_1+x_2+\cdots+x_n=0\\ x_1+nx_2+\cdots+x_n=0\\ \vdots\\ x_1+x_2+\cdots+nx_n=0\end{cases}$$

اگر معادلات دوم تا nام را با معادله اول جمع کنیم داریم $(2n-1)(x_1+\cdots+x_n)=0$ و چون $2n-1\neq 0$ داریم $x_1+\cdots+x_n$. اکنون اگر معادله‌ی iام (برای $i=1,\dots,n$) را با معادله‌ی اخیر کم کنیم خواهیم داشت $(n-1)x_i=0$. پس $X=\mathbf{0}$ و در نتیجه ماتریس A مقدار ویژه‌ی صفر ندارد.

۱۵. باید یک ماتریس ناصفر با مقادیر ویژه‌ی ۰ بیابیم. یک ماتریس بالا مثلثی با درایه‌های قطری ۰ مثال می‌زنیم. ماتریس

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای می‌نیمال x^2 و ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\ 0&0&1\\ 0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix}0&1&1\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix}0&1&1\\ 0&0&1\\ 0&0&0\end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای می‌نیمال x^3 هستند.

۱۶. فرض کنید A ماتریس قطری شدنی باشد و X_i ماتریسی باشد که ستون‌های پایه‌ای برای $\ker(A-\lambda_iI)$ هستند (ستون‌های X_i بردارهای ویژه‌ی مستقل خطی متناظر مقدار ویژه‌ی λ_i هستند). در این صورت ماتریس $P=[X_1\ X_2\ \cdots\ X_k]$ وارون‌پذیر است. اگر P^{-1} را به صورت مناسب بلوکی در نظر بگیریم، آن‌گاه داریم

$$A = PDP^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= [X_1\, X_2\, \cdots\, X_k] \begin{bmatrix} \lambda_1 I & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2 I & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_k I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^\top \\ Y_2^\top \\ \vdots \\ Y_k^\top \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 X_1 Y_1^\top + \lambda_1 X_2 Y_2^\top + \cdots + \lambda_k X_k Y_k^\top \\ &= \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_k G_k, \end{aligned}$$

که در آن $G_i = X_i Y_i^\top$. چون $PP^{-1} = I$ داریم

$$I = PP^{-1} = [X_1\, X_2\, \cdots\, X_k] \begin{bmatrix} Y_1^\top \\ Y_2^\top \\ \vdots \\ Y_k^\top \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} X_i Y_i^\top = \sum_{i=1}^{k} G_i.$$

بنابراین $\sum_{i=1}^{k} G_i = I$. همچنین چون $P^{-1}P = I$ داریم

$$I = P^{-1}P = \begin{bmatrix} Y_1^\top \\ Y_2^\top \\ \vdots \\ Y_k^\top \end{bmatrix} [X_1\, X_2\, \cdots\, X_k] = \begin{bmatrix} Y_1^\top X_1 & Y_1^\top X_2 & \cdots & Y_1^\top X_k \\ Y_2^\top X_1 & Y_2^\top X_2 & \cdots & Y_2^\top X_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_k^\top X_1 & Y_k^\top X_2 & \cdots & Y_k^\top X_k \end{bmatrix}$$

و بنابراین

$$Y_i^\top X_j = \begin{cases} I & \text{اگر}\quad i = j \\ \mathbf{0} & \text{اگر}\quad i \neq j \end{cases}$$

از این‌رو

$$G_i^2 = G_i G_i = (X_i Y_i^\top)(X_i Y_i^\top) = X_i (Y_i^\top X_i) Y_i^\top = X_i I Y_i^\top = X_i Y_i^\top = G_i$$

و برای $i \neq j$،

$$G_i G j = (X_i Y_i^\top)(X_j Y_j^\top) = X_i (Y_i^\top X_j) Y_i^\top = X_i \mathbf{0} Y_i^\top = \mathbf{0}.$$

برای اثبات تساوی $\operatorname{Im} G_i = \ker(A - \lambda I)$ از رابطه‌های $\operatorname{Im}(AB) \subseteq \operatorname{Im} A$ (که در تمرین ؟؟ ثابت شد) و $Y_i^\top X_i = I$ استفاده می‌کنیم. در واقع چون

$$\operatorname{Im} G_i = \operatorname{Im}(X_i Y_i^\top) \subseteq \operatorname{Im} X_i = \operatorname{Im}(I X_i) = \operatorname{Im}(X_i Y_i^\top X_i) = \operatorname{Im}(G_i X_i) \subseteq \operatorname{Im} G_i$$

داریم $\operatorname{Im} G_i = \operatorname{Im} X_i = \ker(A - \lambda_i I)$. اکنون برای اثبات تساوی $\ker G_i = \operatorname{Im}(A - \lambda I)$ از رابطه $A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j G_j$ و خواص G_iها که در بالا اثبات استفاده می‌کنیم. در واقع چون

$$G_i (A - \lambda_i I) = G_i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j G_j - \lambda_i \sum_{j=1}^{k} G_j \right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j G_i G_j - \lambda_i \sum_{j=1}^{k} G_i G_j \\ &= \lambda_i G_i^2 - \lambda_i G_i^2 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم $\operatorname{Im}(A - \lambda_i I) \subseteq \ker G_i$. اما چون می‌دانیم $\ker(A - \lambda_i I) = \operatorname{Im} G_i$ داریم

$$\dim R(A - \lambda_i I) = n - \dim \ker(A - \lambda_i I) = n - \operatorname{Im} G_i = \dim \ker G_i$$

و در نتیجه $\operatorname{Im}(A - \lambda_i I) = \ker G_i$. بنابراین یک طرف ادعا ثابت شد.

برای اثبات طرف عکس ادعا فرض کنید ماتریس‌های G_i با خواص ذکر شده در صورت مساله وجود داشته باشند. باید نشان دهیم که A قطری شدنی است. ؟؟؟؟

$$\begin{aligned} n &= \dim \operatorname{Im} I \\ &= \dim \operatorname{Im}(G_1 + G_2 + \cdots + G_k) \\ &= \dim \operatorname{Im} G_1 + \dim \operatorname{Im} G_2 + \cdots + \dim \operatorname{Im} G_k \\ &= \dim \ker(A - \lambda_1 I) + \dim \ker(A - \lambda_2 I) + \cdots + \dim \ker(A - \lambda_k I) \end{aligned}$$

حل تمرین‌های بخش ۳.۵ صفحه‌ی ۱۹۷

۱. چون $g(x)$ و $h(x)$ نسبت به هم اول هستند، چندجمله‌ای‌های $r(x)$ و $s(x)$ وجود دارند که $r(x)g(x) + s(x)h(x) = 1$ و بنابراین $r(T)g(T) + s(T)h(T) = \mathrm{id}$. چون $\mathbf{0} = r(T)f(T) = r(T)h(T)g(T) = h(T)r(T)g(T)$، داریم $r(T)g(T) \subseteq \ker(h(T))$ به همین ترتیب چون $\mathbf{0} = s(T)f(T) = s(T)g(T)h(T) = g(T)s(T)h(T)$، داریم $s(T)h(T) \subseteq \ker(h(T))$ به همین ترتیب چون کنید $v \in V$. در این صورت $v = r(T)g(T)v + s(T)h(T)v$ و طبق بالا $r(T)g(T)v \in W = \ker(h(T))$ و $s(T)h(T)v \in U = \ker(g(T))$. پس $V = U + W$. اکنون فرض کنید $v \in U \cap W$. در این صورت $h(T)v = \mathbf{0}$ و $g(T)v = \mathbf{0}$. پس $v = r(T)g(T)v + s(T)h(T)v = \mathbf{0}$.

۲. فرض کنید $T^2 = T$. پس $T(T - \mathrm{id}) = \mathbf{0}$ و بنابراین T در چندجمله‌ای $f(x) = x(x-1)$ صدق می‌کند. پس چندجمله‌ای می‌نیمال T یکی از چندجمله‌ای‌های x، $x - 1$، یا $x(x-1)$ است، که عوامل هرکدام خطی هستند. بنابراین T قطری شدنی است. به همین صورت فرض کنید $T^3 = T$. پس $T(T - \mathrm{id})(T + \mathrm{id}) = \mathbf{0}$ و بنابراین T در چندجمله‌ای $f(x) = x(x-1)(x+1)$ صدق می‌کند. پس چندجمله‌ای می‌نیمال T یکی از چندجمله‌ای‌های x، $x - 1$، $x + 1$، $x(x-1)$، $x(x+1)$، $(x-1)(x+1)$، یا $x(x-1)(x+1)$ است، که عوامل هرکدام خطی هستند. بنابراین T قطری شدنی است.

۳. قرار می‌دهیم $S := T\mid_W$. فرض کنید $m(x)$ چندجمله‌ای می‌نیمال T و $f(x)$ جندجمله‌ای می‌نیمال S باشد. چون $m(T)$ به ازای هر بردار در V صفر است، یعنی به ازای هر $v \in V$، $m(T)v = 0$، پس $m(T)$ روی W نیز صفر است. بنابراین $m(S) = 0$ و در نتیجه $f(x) \mid m(x)$.

۴. طبق قضیه فرم مثلثی A با یک ماتریس بالا مثلثی که روی قطر آن مقادیر ویژه هستند، مشابه است. چون اثر ماتریس‌های مشابه یکسان است، حکم ثابت است.

۵. فرض کنید $v \in \operatorname{Im}(T^j)$. در این صورت بردار u وجود دارد که $T^j(u) = v$ و در نتیجه $T^{j-1}(T(u)) = v$. از این‌رو $v \in \operatorname{Im}(T^{j-1})$. پس به ازای هر j، $\operatorname{Im}(T^j) \subseteq \operatorname{Im}(T^{j-1})$ و

$$V = \operatorname{Im}\mathrm{id} = \operatorname{Im}T^0 \supseteq \operatorname{Im}T \supseteq \operatorname{Im}T^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im}T^{k-1} \supseteq \operatorname{Im}T^k \supseteq \operatorname{Im}T^{k+1} = \{\mathbf{0}\}.$$

می‌دهیم $\operatorname{Im}(T^{j-1}) \subset \operatorname{Im}(T^j)$، به ازای هر $k \le j \le 1$. فرض کنید چنین نباشد و یک ازای یک j، $\operatorname{Im}(T^j) = \operatorname{Im}(T^{j-1})$. طبق قضیه‌ای در کتاب داریم

$$\{\mathbf{0}\} = \ker\mathrm{id} = \ker T^0 \subset \ker T \subset \ker T^2 \subset \cdots \subset \ker T^k \subset \ker T^{k+1} = \ker\mathbf{0} = V.$$

طبق قضیه‌ی پوچی + رتبه داریم

$$n = \dim\ker T^j + \dim\operatorname{Im}T^j$$
$$n = \dim\ker T^{j-1} + \dim\operatorname{Im}T^{j-1}$$

بنابراین $\dim\ker T^j + \dim\operatorname{Im}T^j = \dim\ker T^{j-1} + \dim\operatorname{Im}T^{j-1}$ و چون $\operatorname{Im}(T^j) = \operatorname{Im}(T^{j-1})$ داریم $\dim\ker T^j = \dim\ker T^{j-1}$. اکنون چون $\ker T^{j-1} \subset \ker T^j$ نتیجه می‌گیریم $\ker T^{j-1} = \ker T^j$، که تناقض است.

۶. (آ) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}
\det(xI - A) &= \begin{vmatrix} 3+x & -1 & 1 \\ 7 & -5+x & 1 \\ 6 & -6 & 2+x \end{vmatrix} \quad (C_2 + C_3 \to C_3) \\
&= \begin{vmatrix} 3+x & -1 & 0 \\ 7 & -5+x & -4+x \\ 6 & -6 & -4+x \end{vmatrix} \quad (-R_3 + R_2 \to R_2) \\
&= \begin{vmatrix} 3+x & -1 & 0 \\ 1 & 1+x & 0 \\ 6 & -6 & -4+x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب ستون سوم}) \\
&= (-4+x)\begin{vmatrix} 3+x & -1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} \\
&= (x-4)((x+3)(x+1)+1) \\
&= (x-4)(x+2)^2
\end{aligned}$$

پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از ۴ و ۲−. اکنون بردارهای ویژه متناظر ۴ را می‌یابیم. باید دستگاه $(A - 4I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A - 4I)X = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}
&\xrightarrow{-R_3/6 \to R_3} \begin{bmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[7R_3 + R_2 \to R_2]{7R_3 + R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{-R_1/6 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[R_1 + R_3 \to R_3]{6R_1 + R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

بنابراین $x_1 = 0$ و $x_2 - x_3 = 0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۴ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1 = (0, 1, 1)^\top$. اکنون بردارهای ویژه متناظر ۲− را می‌یابیم. باید دستگاه $(A + 2I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A + 2I)X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_3/6 \to R_3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[7R_3+R_2\to R_2]{R_3+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

بنابراین $x_3=0$ و $x_1-x_2=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر -2 عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_2\\0\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_2=(1,1,0)$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A+2I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A+2I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned}(A+2I)^2X &= \begin{bmatrix}-1&1&-1\\-7&7&-1\\-6&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-7&7&-1\\-6&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0&0&0\\-36&36&0\\-36&36&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

بنابراین $-x_1+x_2=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A+2I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1\\x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_3=(0,0,1)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A+2I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.
ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ عبارت است از

$$P=[X_1\;X_2\;X_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ بنویسیم. داریم

$$\begin{aligned}AX_1&=4X_1=4X_1+0X_2+0X_3\\AX_2&=-2X_2=0X_1-2X_2+0X_3\end{aligned}$$

می‌توانیم بردار AX_3 را مستقیماً محاسبه کنیم و بر حسب اعضای پایه بنویسیم. یا می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم. چون $(A+2I)^2X_3=\mathbf{0}$، پس $(A+2I)X_3$ جوابی از دستگاه $(A+2I)X=\mathbf{0}$ است، یعنی مضربی از X_1 است. داریم

$$(A+2I)X_3=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-7&7&-1\\-6&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}=-X_1$$

و در نتیجه $(A+2I)X_3=-X_1$، یعنی $AX_3=-X_1-2X_3$. پس

$$AX_3=-X_1+0X_2-2X_3$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B=[AX_1\;AX_2\;AX_3]=\begin{bmatrix}4&0&-1\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

(ب) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}\det(xI-A) &= \begin{vmatrix}1+x&-1&-1\\2&-2+x&-1\\1&-1&-1+x\end{vmatrix}\quad (C_2=C_1+C_2)\\ &= \begin{vmatrix}1+x&x&-1\\2&x&-1\\1&0&-1+x\end{vmatrix}\quad (-R_1+R_2\to R_2)\\ &= \begin{vmatrix}1+x&x&-1\\1-x&0&0\\1&0&-1+x\end{vmatrix}\quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب ستون دوم})\\ &= -x\begin{vmatrix}1-x&0\\1&-1+x\end{vmatrix}\\ &= -x((1-x)(-1+x))\\ &= x(x-1)^2\end{aligned}$$

پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از ۰ و ۱. اکنون بردارهای ویژه متناظر ۰ را می‌یابیم. باید دستگاه $AX=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$AX=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-2&2&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $x_3=0$ و $-x_1+x_2=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۰ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1=(1,1,0)^\top$. اکنون بردارهای ویژه متناظر ۱ را می‌یابیم. باید دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-I)X=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_3+R_2\to R_2]{-2R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $-x_2+x_3=0$ و $-x_1+x_2=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۱ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_2=(1,1,1)^\top$.

اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A-I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned}(A-I)^2X &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

بنابراین $x_1-x_2=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_3=(0,1,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.

ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ عبارت است از

$$P=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ بنویسیم. داریم

$$AX_1=0=0X_1+0X_2+0X_3$$
$$AX_2=-X_2=0X_1+X_2+0X_3$$

چون $(A-I)^2X_3=\mathbf{0}$، پس $(A-I)X_3$ جوابی از دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$ است، یعنی مضربی از X_2 است. داریم

$$(A-I)X_3=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=X_2$$

و در نتیجه $(A-I)X_3=X_2$، یعنی $AX_3=X_2+X_3$. پس

$$AX_3=0X_1+X_2+X_3$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B=[AX_1\ AX_2\ AX_3]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(پ) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\det(xI-A) = \begin{vmatrix} -3+x & 7 & 4 \\ 1 & -9+x & -4 \\ -2 & 14 & 6+x \end{vmatrix} \quad (R_1+R_2\to R_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -3+x & 7 & 4 \\ -2+x & -2+x & 0 \\ -2 & 14 & 6+x \end{vmatrix} \quad (-C_1+C_2\to C_2)\\
&= \begin{vmatrix} -3+x & 10-x & 4 \\ -2+x & 0 & 0 \\ -2 & 16 & 6+x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب سطر دوم})\\
&= -(-2+x)\begin{vmatrix} 10-x & 4 \\ 16 & 6+x \end{vmatrix}\\
&= -(-2+x)((10-x)(6+x)-46)\\
&= (x-2)^3
\end{aligned}$$

پس ۲ تنها مقدار ویژه‌ی A است. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. باید دستگاه $(A-2I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-2I)X=\begin{bmatrix} 1 & -7 & -4 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & -14 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & -4 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & -14 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $x_1-7x_2-4x_3=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۲ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7x_2+4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1=(7,1,0)^\top$ و $X_2=(4,0,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-2I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A-2I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$(A-2I)^2X=\begin{bmatrix} 1 & -7 & -4 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & -14 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -7 & -4 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & -14 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و بنابراین هر بردار دلخواه در دستگاه $(A-2I)^2X=\mathbf{0}$ صدق می‌کند. چون باید برداری انتخاب کنیم که در دستگاه $(A-2I)X=\mathbf{0}$ صدق نکند، مثلاً قرار می‌دهیم پس مثلاً بردار $X_3=(1,0,0)^\top$. ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ عبارت است از

$$P=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ بنویسیم. داریم

$$\begin{aligned}
AX_1&=2X_1=2X_1+0X_2+0X_3\\
AX_2&=2X_2=0X_1+2X_2+0X_3
\end{aligned}$$

چون $(A-2I)^2X_3=\mathbf{0}$، پس $(A-2I)X_3$ جوابی از دستگاه $(A-2I)X=\mathbf{0}$ است. داریم

$$(A-2I)X_3=\begin{bmatrix} 1 & -7 & -4 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & -14 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}=-X_1+2X_2$$

و در نتیجه $(A-2I)X_3=-X_1+2X_2$، یعنی $AX_3=-X_1+2X_2+2X_3$. پس

$$AX_3=-X_1+2X_2+2X_3$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B=[AX_1\ AX_2\ AX_3]=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(ت) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}
\det(xI-A) &= \begin{vmatrix} -2+x & -3 & -2 \\ 1 & 1+x & 1 \\ -1 & -2 & -2+x \end{vmatrix} \quad (R_3+R_2\to R_2)\\
&= \begin{vmatrix} -2+x & -3 & -2 \\ 0 & -1+x & -1+x \\ -1 & -2 & -2+x \end{vmatrix} \quad (-C_3+C_2\to C_2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -2+x & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1+x \\ -1 & -x & -2+x \end{vmatrix} \quad \text{(بسط لاپلاس بر حسب سطر دوم)} \\
&= -(-1+x)\begin{vmatrix} -2+x & -1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} \\
&= -(-1+x)(-x(-2+x)-1) \\
&= (-1+x)^3
\end{aligned}
$$

پس ۱ تنها مقدار ویژه‌ی A است. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. باید دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$
(A-I)X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R_2+R_1\to R_1]{R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

بنابراین $x_1-x_3=0$ و $x_2+x_3=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۱ عبارتند از

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

قرار می‌دهیم $X_1=(1,-1,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A-I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$
\begin{aligned}
(A-I)^2X &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

بنابراین $x_2+x_3=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
$$

پس مثلاً بردار $X_2=(1,0,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند. اکنون چون $(A-I)^3=\mathbf{0}$ پس هر بردار ناصفر در دستگاه $(A-I)^3X=\mathbf{0}$ صدق می‌کند. بنابراین یک بردار دلخواه که در دستگاه $(A-I)^2X=\mathbf{0}$ صدق نکند را انتخاب می‌کنیم، مثلاً قرار می‌دهیم $X_3=(0,1,0)^\top$. ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ عبارت است از

$$
P = [X_1\ X_2\ X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ بنویسیم. داریم

$$
\begin{aligned}
(A-I)X_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_1 \\
(A-I)X_3 &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2X_1+X_2
\end{aligned}
$$

و در نتیجه

$$
\begin{aligned}
AX_1 &= X_1 = X_1+0X_2+0X_3 \\
AX_2 &= X_1+X_2+0X_3 \\
AX_3 &= 2X_1+X_2+X_3
\end{aligned}
$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$
B = [AX_1\ AX_2\ AX_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

(ث) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$
\det(xI-A) = \begin{vmatrix} 5+x & -3 & -1 \\ 4 & -2+x & -1 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix} \quad (-R_1+R_2\to R_2)
$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 5+x & -3 & -1 \\ -1-x & 1+x & 0 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix} \quad (C_1+C_2\to C_2) \\
&= \begin{vmatrix} 5+x & 2+x & -1 \\ -1-x & 0 & 0 \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب سطر دوم}) \\
&= -(-1-x)\begin{vmatrix} 2+x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \\
&= -(-1-x)((2+x)x+1) \\
&= (1+x)^3
\end{aligned}$$

پس -1 تنها مقدار ویژه‌ی A است. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. باید دستگاه $(A+I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+I)X=\begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. دستگاه بالا فقط شامل یک معادله‌ی $-4x_1+3x_2+x_3=0$ است، بنابراین بردارهای ویژه متناظر -1 عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 4x_1-3x_2 \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1=(1,0,4)^\top$ و $X_2=(0,1,-3)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A+I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A+I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$(A+I)^2=\begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و بنابراین هر بردار دلخواه در دستگاه $(A+I)^2X=\mathbf{0}$ صدق می‌کند. چون باید برداری انتخاب کنیم که در دستگاه $(A+I)X=\mathbf{0}$ صدق نکند، مثلاً قرار می‌دهیم $X_3=(0,0,1)^\top$. ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ عبارت است از

$$P=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ بنویسیم. داریم

$$(A+I)X_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=X_1+X_2$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
AX_1 &= -X_1=-X_1+0X_2+0X_3 \\
AX_2 &= -X_2=0X_1+0X_2+0X_3 \\
AX_3 &= X_1+X_2-X_3
\end{aligned}$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B=[AX_1\ AX_2\ AX_3]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(ج) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}
\det(xI-A) &= \begin{vmatrix} 11+x & -1 & 6 \\ 7 & 1+x & 3 \\ -8 & 1 & -3+x \end{vmatrix} \quad (R_1+R_3\to R_3) \\
&= \begin{vmatrix} 11+x & -1 & 6 \\ 7 & 1+x & 3 \\ 3+x & 0 & 3+x \end{vmatrix} \quad (-C_1+C_3\to C_3) \\
&= \begin{vmatrix} 11+x & -1 & -5-x \\ 7 & 1+x & -4 \\ 3+x & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب سطر سوم}) \\
&= (3+x)\begin{vmatrix} -1 & -5-x \\ 1+x & -4 \end{vmatrix} \\
&= (3+x)(4-(1+x)(-5-x)) \\
&= (x+3)^3
\end{aligned}$$

پس -3 تنها مقدار ویژه‌ی A است. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. باید دستگاه $(A+3I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+3I)X=\begin{bmatrix}-8 & 1 & -6\\ -7 & 2 & -3\\ 8 & -1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix}-8 & 1 & -6\\ -7 & 2 & -3\\ 8 & -1 & 6\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}-8 & 1 & -6\\ 9 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/9\to R_2}\begin{bmatrix}-8 & 1 & -6\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{8R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بنابراین $x_2+2x_3=0$ و $x_1+x_3=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر -3 عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_3\\ -2x_3\\ x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1=(-1,-2,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A+3I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A+3I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned}(A+3I)^2X &= \begin{bmatrix}-8 & 1 & -6\\ -7 & 2 & -3\\ 8 & -1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8 & 1 & -6\\ -7 & 2 & -3\\ 8 & -1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}9 & 0 & 9\\ 18 & 0 & 18\\ -9 & 0 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

بنابراین $x_1+x_3=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A+3I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ -x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ -x_1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_2=(0,0,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A+3I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند. اکنون چون $(A+3I)^3=\mathbf{0}$ پس هر بردار ناصفر در دستگاه $(A+3I)^3X=\mathbf{0}$ صدق می‌کند. بنابراین یک بردار دلخواه که در دستگاه $(A+3I)^2X=\mathbf{0}$ صدق نکند را انتخاب می‌کنیم، مثلاً قرار می‌دهیم $X_3=(1,0,0)^\top$. ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ عبارت است از

$$P=[X_1\ X_2\ X_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3\}$ بنویسیم. داریم

$$(A+3I)X_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}=-X_1$$

$$(A+3I)X_3=\begin{bmatrix}-8\\ -7\\ 8\end{bmatrix}=8X_1+9X_2$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}AX_1 &= -3X_1=-3X_1+0X_2+0X_3\\ AX_2 &= -X_1-3X_2+0X_3\\ AX_3 &= 8X_1+9X_2-3X_3\end{aligned}$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B=[AX_1\ AX_2\ AX_3]=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 8\\ 0 & -3 & 9\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

(ج) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. چون ماتریس A یک ماتریس بلوکی مثلثی $A=\begin{bmatrix}B & C\\ \mathbf{0} & B\end{bmatrix}$ است، که در آن $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$، داریم

$$\det(xI-A)\ =\ \det(xI-B)^2$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} -1+x & -1 \\ 1 & -3+x \end{vmatrix}^2 \\ &= ((-1+x)(-3+x)+1)^2 \\ &= (x-2)^4. \end{aligned}$$

پس ۲ تنها مقدار ویژه‌ی A است. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. باید دستگاه $(A-2I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-2I)X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_3+R_4\to R_4]{-R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_3+R_2\to R_2]{-R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_2+R_3\to R_3]{R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $-x_1+x_2=0$ و $x_3=x_4=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۲ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1=(1,1,0,0)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-2I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A-2I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned} (A-2I)^2X &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین $x_3=x_4=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-2I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_2=(1,0,0,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A-2I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.
اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-2I)^2X\neq\mathbf{0}$ و $(A-2I)^3X=\mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned} (A-2I)^3X &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

بنابراین $-x_3+x_4=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-2I)^3X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_3 = (0, 0, 1, 1)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A - 2I)^2X = \mathbf{0}$ صدق نمی‌کند. در نهایت چون $(A - 2I)^4 = \mathbf{0}$ پس هر بردار ناصفر در دستگاه $(A - 2I)^4X = \mathbf{0}$ صدق می‌کند. بنابراین یک بردار دلخواه که در دستگاه $(A - 2I)^3X = \mathbf{0}$ صدق نکند را انتخاب می‌کنیم، مثلاً قرار می‌دهیم $X_4 = (0, 0, 0, 1)^\top$. ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ عبارت است از

$$P = [X_1\ X_2\ X_3\ X_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP = B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ بنویسیم. داریم

$$(A - 2I)X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -X_1$$

$$(A - 2I)X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -X_2$$

$$(A - 2I)X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -X_1 + X_2 + X_3$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} AX_1 &= 2X_1 = 2X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ AX_2 &= -X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ AX_3 &= 0X_1 - X_2 + 2X_3 + 0X_4 \\ AX_4 &= -X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 \end{aligned}$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B = [AX_1\ AX_2\ AX_3\ AX_4] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(ح) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم. چون ماتریس A یک ماتریس بلوکی مثلثی $A = \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix}$ است، که در آن $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$، داریم

$$\begin{aligned} \det(xI - A) &= \det(xI - B)\det(xI - C) \\ &= \begin{vmatrix} -1 + x & -1 \\ 1 & 1 + x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 + x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \\ &= ((-1 + x)(1 + x) + 1)((-2 + x)x + 1) \\ &= (-1 + x)^2x^2 \end{aligned}$$

پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از ۱ و ۰. اکنون بردارهای ویژه متناظر ۱ را می‌یابیم. باید دستگاه $(A - I)X = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A - I)X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1 + R_4 \to R_4]{\substack{2R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_1 + R_3 \to R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_4 \to R_4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین $x_1 = x_2 = 0$ و $x_3 + x_4 = 0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۱ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ -x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1 = (0, 0, 1, -1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-I)X \neq \mathbf{0}$ و $(A-I)^2 X = \mathbf{0}$. داریم

$$(A-I)^2 X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $x_1 = x_2 = 0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-I)^2 X = \mathbf{0}$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_2 = (0, 0, 1, 0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A-I)X = \mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.
اکنون بردارهای ویژه متناظر ۰ را می‌یابیم. باید دستگاه $AX = \mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1 + R_4 \to R_4]{\substack{R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_1 + R_3 \to R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_4 + R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $x_3 = x_4 = 0$ و $x_1 + x_2 = 0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۰ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_3 = (1, -1, 0, 0)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $AX \neq \mathbf{0}$ و $A^2 X = \mathbf{0}$. داریم

$$A^2 X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به سادگی نتیجه می‌شود که $x_4 = 0$ و $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $A^2 X = \mathbf{0}$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_4 = (1, 0, 1, 0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $AX = \mathbf{0}$ صدق نمی‌کند. ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ عبارت است از

$$P = [X_1 \; X_2 \; X_3 \; X_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ بنویسیم. داریم

$$(A-I)X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_1$$

$$AX_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = X_3$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
AX_1 &= X_1 = X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
AX_2 &= X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
AX_3 &= 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
AX_4 &= 0X_1 + 0X_2 + X_3 + 0X_4
\end{aligned}$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B = [AX_1\ AX_2\ AX_3\ AX_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(خ) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\det(xI-A) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2+x & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -3+x & 1 \\ -2 & -1 & -4 & 2+x \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} R_1+R_3 \to R_3 \\ R_1+R_4 \to R_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2+x & -3 & 1 \\ -1+x & 0 & -2+x & 1 \\ -1+x & 0 & -3 & 2+x \end{vmatrix} \quad (-R_3+R_4 \to R_4)$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2+x & -3 & 1 \\ -1+x & 0 & -2+x & 1 \\ 0 & 0 & -1-x & 1+x \end{vmatrix} \quad (C_4+C_3 \to C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2+x & -2 & 1 \\ -1+x & 0 & -1+x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix} \quad (-C_1+C_3 \to C_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1+x & 1 & -x & 0 \\ -3 & -2+x & 1 & 1 \\ -1+x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix}$$ (بسط لاپلاس بر حسب سطر چهارم)

$$= (1+x) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & -x \\ -3 & -2+x & 1 \\ -1+x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ (بسط لاپلاس بر حسب سطر سوم)

$$\begin{aligned}
&= (1+x)(-1+x) \begin{vmatrix} 1 & -x \\ -2+x & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1+x)(-1+x)((1-(-2+x)(-x))) \\
&= (-1+x)^3(1+x)
\end{aligned}$$

پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از -1 و 1. اکنون بردارهای ویژه متناظر -1 را می‌یابیم. باید دستگاه $(A+I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+I)X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_3+R_4 \to R_4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{3R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}0&-1&-1&0\\3&0&0&-1\\2&0&3&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}0&-1&-1&0\\3&0&0&-1\\-1&0&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین $3x_1-x_4=0$، $-x_2-x_3=0$ و $-x_1+3x_3=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر -1 عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_3\\-x_3\\x_3\\9x_3\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\9\end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1=(3,-1,1,9)^\top$. اکنون بردارهای ویژه متناظر ۱ را می‌یابیم. باید دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-I)X=\begin{bmatrix}-2&-1&-1&0\\3&1&3&-1\\2&1&2&-1\\2&1&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix}-2&-1&-1&0\\3&1&3&-1\\2&1&2&-1\\2&1&4&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\R_1+R_3\to R_3}}\begin{bmatrix}-2&-1&-1&0\\1&0&2&-1\\0&0&1&-1\\0&0&3&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3R_3+R_4\to R_4]{\substack{R_3+R_1\to R_1\\-2R_3+R_2\to R_2}}\begin{bmatrix}-2&-1&0&-1\\1&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\1&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین $-x_2+x_4=0$، $x_1+x_4=0$ و $x_3-x_4=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۱ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_4\\x_4\\x_4\\x_4\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_2=(-1,1,1,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A-I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned}(A-I)^2X&=\begin{bmatrix}-2&-1&-1&0\\3&1&3&-1\\2&1&2&-1\\2&1&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1&-1&0\\3&1&3&-1\\2&1&2&-1\\2&1&4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-1&0&-3&2\\1&0&2&-1\\1&0&1&0\\1&0&-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix}-1&0&-3&2\\1&0&2&-1\\1&0&1&0\\1&0&-3&4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\R_1+R_3\to R_3}}\begin{bmatrix}-1&0&-3&2\\0&0&-1&1\\0&0&-2&2\\0&0&-6&6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-6R_2+R_4\to R_4]{\substack{-3R_2+R_1\to R_1\\-2R_2+R_3\to R_3}}\begin{bmatrix}-1&0&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین $-x_1-x_4=0$ و $-x_3+x_4=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_4\\x_2\\x_4\\x_4\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_3 = (0, 1, 0, 0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A-I)X = \mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.
اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-I)^2X \neq \mathbf{0}$ و $(A-I)^3X = \mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned}
(A-I)^3X &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

بنابراین $-x_3 + x_4 = 0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-I)^3X = \mathbf{0}$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_4 = (1, 0, 0, 0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A-I)^2X = \mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.
ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ عبارت است از

$$P = [X_1\ X_2\ X_3\ X_4] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP = B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ بنویسیم. داریم

$$(A-I)X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = X_2$$

$$(A-I)X_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2X_2 + X_3$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
AX_1 &= -X_1 = -X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
AX_2 &= X_2 = 0X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
AX_3 &= 0X_1 + X_2 + X_3 + 0X_4 \\
AX_4 &= 0X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4
\end{aligned}$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B = [AX_1\ AX_2\ AX_3\ AX_4] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(د) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\begin{aligned}
\det(xI-A) &= \begin{vmatrix} 3+x & -6 & -3 & -2 \\ 2 & -3+x & -2 & -2 \\ 1 & -3 & x & -1 \\ 1 & -1 & -2 & x \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} C_1 + C_4 \to C_4 \\ C_1 + C_3 \to C_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3+x & -6 & x & 1+x \\ 2 & -3+x & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1+x & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1+x \end{vmatrix} \quad (-R_1 + R_4 \to R_4) \\
&= \begin{vmatrix} 3+x & -6 & x & 1+x \\ 2 & -3+x & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1+x & 0 \\ -2-x & 5 & -1-x & 0 \end{vmatrix} \quad (R_4 + R_3 \to R_3) \\
&= \begin{vmatrix} 3+x & -6 & x & 1+x \\ 2 & -3+x & 0 & 0 \\ -1-x & 2 & 0 & 0 \\ -2-x & 5 & -1-x & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب سطر چهارم}) \\
&= -(1+x) \begin{vmatrix} 2 & -3+x & 0 \\ -1-x & 2 & 0 \\ -2-x & 5 & -1-x \end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب ستون سوم})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(1+x)(-1-x)\begin{vmatrix} 2 & -3+x \\ -1-x & 2 \end{vmatrix}\\
&= -(1+x)(-1-x)(4-(-1-x)(-3+x))\\
&= (-1+x)^2(1+x)^2
\end{aligned}
$$

پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از -1 و 1. اکنون بردارهای ویژه متناظر -1 را می‌یابیم. باید دستگاه $(A+I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$
(A+I)X=\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}
&\xrightarrow[-R_4+R_3\to R_3]{\substack{-2R_4+R_1\to R_1\\ -2R_4+R_2\to R_2}}
\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\\
&\xrightarrow[-R_2/2+R_4\to R_4]{\substack{-2R_2+R_1\to R_1\\ -R_2+R_3\to R_3}}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\\
&\xrightarrow[-3R_3+R_4\to R_4]{\substack{-3R_3+R_1\to R_1\\ 2R_3+R_2\to R_2}}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

بنابراین $x_2=x_3=0$ و $-x_1+x_4=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر -1 عبارتند از

$$
X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\\ 0\\ 0\\ x_1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.
$$

قرار می‌دهیم $X_1=(1,0,0,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A+I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A+I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$
\begin{aligned}
(A+I)^2X &= \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} -13 & 23 & 13 & 13\\ -8 & 12 & 8 & 8\\ -6 & 10 & 6 & 6\\ -3 & 5 & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -13 & 23 & 13 & 13\\ -8 & 12 & 8 & 8\\ -6 & 10 & 6 & 6\\ -3 & 5 & 3 & 3\end{bmatrix}
&\xrightarrow[-4R_4+R_1\to R_1]{-2R_4+R_3\to R_3}
\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1\\ -8 & 12 & 8 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 5 & 3 & 3\end{bmatrix}\\
&\xrightarrow[-3R_1+R_4\to R_4]{-8R_1+R_2\to R_2}
\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

بنابراین $x_2=0$ و $-x_1+x_3+x_4=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A+I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$
X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_3+x_4\\ 0\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.
$$

پس مثلاً بردار $X_2=(1,0,1,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A+I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.
اکنون بردارهای ویژه متناظر 1 را می‌یابیم. باید دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$
(A-I)X=\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 & 2\\ -2 & 2 & 2 & 2\\ -1 & 3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2/2 \to R_2} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2+R_3\to R_3 \\ R_2+R_4 \to R_4}]{4R_2+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3/2 \to R_3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_2\to R_2]{-2R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{2R_4+R_2\to R_2 \\ R_4+R_3\to R_3}]{-R_4+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین $x_1 - 5x_4 = 0$، $x_2 - 2x_4 = 0$ و $x_3 - 2x_4 = 0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر **۱** عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_4 \\ 2x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_3 = (5,2,2,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-I)X \neq \mathbf{0}$ و $(A-I)^2X = \mathbf{0}$. داریم

$$(A-I)^2X = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+R_4\to R_4]{-2R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3/4\to R_3]{R_3+R_4\to R_4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $-x_1 - x_2 + 7x_4 = 0$ و $x_3 - 2x_4 = 0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-I)^2X = \mathbf{0}$ عبارتند از

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + 7x_4 \\ x_2 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_4 = (-1,1,0,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A-I)X = \mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.

ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ عبارت است از

$$P = [X_1\ X_2\ X_3\ X_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP = B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر

حسب پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ بنویسیم. داریم

$$(A+I)X_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = -X_1$$

$$(A-I)X_4 = \begin{bmatrix}10\\4\\4\\4\end{bmatrix} = 2X_3$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}
AX_1 &= -X_1 = -X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 0X_4\\
AX_2 &= -X_1 - X_2 + 0X_3 + 0X_4\\
AX_3 &= X_3 = 0X_1 + 0X_2 + X_3 + 0X_4\\
AX_4 &= 0X_1 + 0X_2 + 2X_3 + X_4
\end{aligned}$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B = [AX_1\ AX_2\ AX_3\ AX_4] = \begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(ذ) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\det(xI-A) = \begin{vmatrix}3+x & -2 & -1 & -1\\ 6 & -3+x & -3 & -1\\ 3 & -2 & x & -2\\ 2 & -2 & -1 & x\end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix}-R_1+R_3\to R_3\\ -R_1+R_4\to R_4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}3+x & -2 & -1 & -1\\ 6 & -3+x & -3 & -1\\ -x & 0 & 1+x & -1\\ -1-x & 0 & 0 & 1+x\end{vmatrix} \quad (C_1+C_4\to C_4)$$

$$= \begin{vmatrix}3+x & -2 & -1 & 2+x\\ 6 & -3+x & -3 & 5\\ -x & 0 & 1+x & -1-x\\ -1-x & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \quad (C_4+C_3\to C_3)$$

$$= \begin{vmatrix}3+x & -2 & 1+x & 2+x\\ 6 & -3+x & 2 & 5\\ -x & 0 & 0 & -1-x\\ -1-x & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب سطر چهارم})$$

$$= -(-1-x)\begin{vmatrix}-2 & 1+x & 2+x\\ -3+x & 2 & 5\\ 0 & 0 & -1-x\end{vmatrix} \quad (\text{بسط لاپلاس بر حسب سطر سوم})$$

$$= (1+x)(-1-x)\begin{vmatrix}-2 & 1+x\\ -3+x & 2\end{vmatrix}$$

$$= -(-1-x)(-1-x)(-4-(1+x)(-3+x))$$

$$= (-1+x)^2(1+x)^2$$

پس مقادیر ویژه‌ی A عبارتند از ۱− و ۱. اکنون بردارهای ویژه متناظر ۱− را می‌یابیم. باید دستگاه $(A+I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+I)X = \begin{bmatrix}-2 & 2 & 1 & 1\\ -6 & 4 & 3 & 1\\ -3 & 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1 & 1\\ -6 & 4 & 3 & 1\\ -3 & 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_4\to R_4]{\substack{-R_1+R_2\to R_2\\ -2R_1+R_3\to R_3}} \begin{bmatrix}-2 & 2 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[2R_3+R_2\to R_2]{R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ -2 & -2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2/2+R_3\to R_3]{-R_2/2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ -2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بنابراین $x_2+x_4=0$، $x_1+x_2=0$ و $3x_2+x_3=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر -1 عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_2\\ x_2\\ -3x_2\\ -x_2\end{bmatrix}=-x_2\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 3\\ 1\end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1=(1,-1,3,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A+I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A+I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned}(A+I)^2X &= \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1\\ -6 & 4 & 3 & 1\\ -3 & 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & 1\\ -6 & 4 & 3 & 1\\ -3 & 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -13 & 8 & 6 & 3\\ -23 & 12 & 10 & 5\\ -13 & 8 & 6 & 3\\ -13 & 8 & 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -13 & 8 & 6 & 3\\ -23 & 12 & 10 & 5\\ -13 & 8 & 6 & 3\\ -13 & 8 & 6 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\substack{-R_1+R_3\to R_3\\ -R_1+R_4\to R_4}}\begin{bmatrix} -13 & 8 & 6 & 3\\ 3 & -4 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 & 0\\ 7 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بنابراین $x_1+x_2=0$ و $7x_1-2x_3-x_4=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A+I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\\ -x_1\\ x_3\\ 7x_1-2x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 0\\ 7\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ -2\end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_2=(0,0,1,-2)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A+I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.
اکنون بردارهای ویژه متناظر ۱ را می‌یابیم. باید دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A-I)X=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1\\ -6 & 2 & 3 & 1\\ -3 & 2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1\\ -6 & 2 & 3 & 1\\ -3 & 2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1+R_4\to R_4]{\substack{-R_1+R_2\to R_2\\ -2R_1+R_3\to R_3}}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 5 & -2 & -3 & 0\\ -6 & 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/2\to R_2}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -3 & 0\\ -6 & 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2R_2+R_4\to R_4]{\substack{-R_2+R_1\to R_1\\ 3R_2+R_3\to R_3}}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ -4 & 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_3/2\to R_3}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -4 & 4 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-4R_3+R_4\to R_4]{-2R_3+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بنابراین $-x_1+x_4=0$، $-x_1+x_3=0$ و $-x_1+x_2=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر ۱ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_1\\ x_1\\ x_1\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_3=(1,1,1,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A-I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A-I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$\begin{aligned}(A-I)^2X &= \begin{bmatrix}-4 & 2 & 1 & 1\\ -6 & 2 & 3 & 1\\ -3 & 2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 2 & 1 & 1\\ -6 & 2 & 3 & 1\\ -3 & 2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 6 & -5\\ -5 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 6 & -5\\ -5 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-R_1+R_3\to R_3\\ -5R_1+R_4\to R_4}]{R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -4\\ 0 & 0 & -8 & 8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3/4\to R_3]{2R_3+R_4\to R_4}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_3+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

بنابراین $-x_1+x_4=0$ و $x_3-x_4=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A-I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\\ x_2\\ x_4\\ x_4\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_4=(0,1,0,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A-I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.

ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ عبارت است از

$$P=[X_1\ X_2\ X_3\ X_4]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ بنویسیم. داریم

$$(A+I)X_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -3\\ -1\end{bmatrix}=-X_1$$

$$(A-I)X_4=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 2\\ 2\end{bmatrix}=2X_3$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}AX_1&=-X_1=-X_1+0X_2+0X_3+0X_4\\ AX_2&=-X_1-X_2+0X_3+0X_4\\ AX_3&=X_3=0X_1+0X_2+X_3+0X_4\\ AX_4&=0X_1+0X_2+2X_3+X_4\end{aligned}$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B=[AX_1\ AX_2\ AX_3\ AX_4]=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(ر) ابتدا چندجمله‌ای سرشت‌نمای A را می‌یابیم.

$$\det(xI-A)=\begin{vmatrix} 15+x & -3 & 9 & 1 \\ -1 & 5+x & -3 & -3 \\ -15 & 7 & -9+x & -5 \\ 3 & -3 & 1 & 5+x \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} -C_3+C_4\to C_4 \\ C_1+C_2\to C_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 15+x & 12+x & 9 & -8 \\ -1 & 4+x & -3 & 0 \\ -15 & -8 & -9+x & 4-x \\ 3 & 0 & 1 & 4+x \end{vmatrix} \quad (R_4+R_3\to R_3)$$

$$=\begin{vmatrix} 15+x & 12+x & 9 & -8 \\ -1 & 4+x & -3 & 0 \\ -12 & -8 & -8+x & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 4+x \end{vmatrix} \quad (C_3+C_4\to C_4)$$

$$=\begin{vmatrix} 15+x & 12+x & 9 & 4+x \\ -1 & 4+x & -3 & 4+x \\ -12 & -8 & -8+x & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4+x \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} -R_1+R_2\to R_2 \\ -R_1+R_4\to R_4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 15+x & 12+x & 9 & 4+x \\ -16-x & -8 & -12 & 0 \\ -12 & -8 & -8+x & 0 \\ -12-x & -12-x & -8 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} -R_4+R_2\to R_2 \\ -R_4+R_3\to R_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 15+x & 12+x & 9 & 4+x \\ -4 & 4+x & -4 & 0 \\ x & 4+x & x & 0 \\ -12-x & -12-x & -8 & 0 \end{vmatrix} \quad (-C_1+C_3\to C_3)$$

$$=\begin{vmatrix} 15+x & 12+x & -6-x & 4+x \\ -4 & 4+x & 0 & 0 \\ x & 4+x & 0 & 0 \\ -12-x & -12-x & 4+x & 0 \end{vmatrix}$$ (بسط لاپلاس بر حسب ستون چهارم)

$$=-(4+x)\begin{vmatrix} -4 & 4+x & 0 \\ x & 4+x & 0 \\ -12-x & -12-x & 4+x \end{vmatrix}$$ (بسط لاپلاس بر حسب ستون سوم)

$$=-(4+x)(4+x)\begin{vmatrix} -4 & 4+x \\ x & 4+x \end{vmatrix}$$
$$=-(4+x)(4+x)(-4(4+x)-x(4+x))$$
$$=(4+x)^4$$

پس -4 تنها مقدار ویژه‌ی A است. اکنون بردارهای ویژه را می‌یابیم. باید دستگاه $(A+4I)X=\mathbf{0}$، یعنی دستگاه

$$(A+4I)X=\begin{bmatrix} -11 & 3 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 15 & -7 & 13 & 5 \\ -3 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

را حل کنیم. با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه بالا داریم

$$\begin{bmatrix} -11 & 3 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 15 & -7 & 13 & 5 \\ -3 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[3R_2+R_4\to R_4]{\substack{11R_2+R_1\to R_1 \\ -15R_2+R_3\to R_3}} \begin{bmatrix} 0 & -8 & 24 & 32 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 8 & -32 & -40 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_3/8\to R_3} \begin{bmatrix} 0 & -8 & 24 & 32 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_2\to R_2]{-8R_3+R_1\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4/8\to R_4]{-R_1/8\to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\ -4R_1+R_3\to R_3}} \begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&-1\\0&-1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین $x_1-x_4=0$، $x_3+x_4=0$ و $-x_2+x_4=0$ و در نتیجه بردارهای ویژه متناظر -4 عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\\x_4\\-x_4\\x_4\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

قرار می‌دهیم $X_1=(1,1,-1,1)^\top$. اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A+4I)X\neq\mathbf{0}$ و $(A+4I)^2X=\mathbf{0}$. داریم

$$(A+4I)^2X=\begin{bmatrix}-11&3&-9&-1\\1&-1&3&3\\15&-7&13&5\\-3&3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11&3&-9&-1\\1&-1&3&3\\15&-7&13&5\\-3&3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-8&24&-8&-24\\24&-8&24&8\\8&-24&8&24\\24&-8&24&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

با استفاده از اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس ضرایب دستگاه داریم

$$\begin{bmatrix}-8&24&-8&-24\\24&-8&24&8\\8&-24&8&24\\24&-8&24&8\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_2+R_4\to R_4]{R_1+R_3\to R_3}\begin{bmatrix}-8&24&-8&-24\\24&-8&24&8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_1+R_2\to R_2}\begin{bmatrix}-8&24&-8&-24\\0&64&0&-64\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/64\to R_2}\begin{bmatrix}-8&24&-8&-24\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-24R_2+R_1\to R_1}\begin{bmatrix}-8&0&-8&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین $-x_1-x_3=0$ و $x_2-x_4=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A+4I)^2X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\-x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_3=(1,0,-1,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A+4I)X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند.
اکنون باید بردار X را طوری بیابیم که $(A+4I)^2X\neq\mathbf{0}$ و $(A+4I)^3X=\mathbf{0}$. داریم

$$(A+4I)^3X=\begin{bmatrix}-11&3&-9&-1\\1&-1&3&3\\15&-7&13&5\\-3&3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8&24&-8&-24\\24&-8&24&8\\8&-24&8&24\\24&-8&24&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}64&-64&64&64\\64&-64&64&64\\-64&64&-64&-64\\64&-64&64&64\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بنابراین $x_1-x_2+x_3+x_4=0$ و در نتیجه جواب‌های دستگاه $(A+4I)^3X=\mathbf{0}$ عبارتند از

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_1+x_3+x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

پس مثلاً بردار $X_3=(1,1,0,0)^\top$ را انتخاب می‌کنیم که در دستگاه $(A+4I)^2X=\mathbf{0}$ صدق نمی‌کند. در نهایت چون $(A+4I)^4=\mathbf{0}$ پس هر بردار ناصفر در دستگاه $(A+4I)^4X=\mathbf{0}$ صدق می‌کند. بنابراین یک بردار دلخواه که در دستگاه $(A+4I)^3X=\mathbf{0}$ صدق نکند را انتخاب می‌کنیم، مثلاً قرار می‌دهیم $X_4=(1,0,0,0)^\top$. ماتریس تبدیل پایه‌ی از پایه‌ی استاندارد به

پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ عبارت است از

$$P=[X_1\ X_2\ X_3\ X_4]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&0\\-1&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

ماتریس P یک ماتریس وارون‌پذیر است و $P^{-1}AP=B$ یک ماتریس مثلثی است. برای یافتن ستون‌های ماتریس B باید AX_j را بر حسب پایه‌ی $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ بنویسیم. داریم

$$(A+4I)X_2=\begin{bmatrix}-2\\-2\\2\\-2\end{bmatrix}=2X_1$$

$$(A+4I)X_3=\begin{bmatrix}-8\\0\\8\\0\end{bmatrix}=-8X_2$$

$$(A+4I)X_4=\begin{bmatrix}-11\\1\\15\\-3\end{bmatrix}=-3X_1-12X_2+4X_3$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}AX_1&=4X_1=4X_1+0X_2+0X_3+0X_4\\AX_2&=2X_1+4X_2+0X_3+0X_4\\AX_3&=0X_1-8X_2+4X_3+0X_4\\AX_4&=-3X_1-12X_2+4X_3+4X_4\end{aligned}$$

و در نتیجه ماتریس B عبارت است از (ستون‌های B بردارهای AX_j هستند)

$$B=[AX_1\ AX_2\ AX_3\ AX_4]=\begin{bmatrix}4&2&0&-3\\0&4&-8&-12\\0&0&4&4\\0&0&0&4\end{bmatrix}.$$

۷. بردار ناصفر $v\in V$ را در نظر می‌گیریم. طبق فرض اسکالر λ وجود دارد که $Tv=\lambda v$. نشان می‌دهیم به ازای هر $0\neq w\in V$، $Tw=\lambda w$. اگر $w\in \operatorname{span}\{v\}$، آن‌گاه اسکالر μ وجود دارد که $w=\mu v$ و در نتیجه $Tw=T(\mu v)=\mu T(v)=\mu\lambda v=\lambda w$. پس فرض کنید $w\notin \operatorname{span}\{v\}$. بنابراین $\{v,w\}$ مستقل خطی است. طبق فرض اسکالرهای μ و α وجود دارند که $Tw=\mu w$ و $T(v+w)=\alpha(v+w)$. پس

$$\alpha(v+w)=T(v+w)=Tv+Tw=\lambda v+\mu w\Longrightarrow(\alpha-\lambda)v+(\alpha-\mu)w=0\Longrightarrow\alpha=\lambda,\ \alpha=\mu.$$

۸. فرض کنید S یک تبدیل خطی باشد که $ST=TS$ در این صورت طبق تمرین ۶ از صفحه ۱۷۳ S قطری شدنی است. پس طبق قضیه‌ی ؟؟، تبدیل‌های S و T به طور هم‌زمان قطری شدنی هستند، یعنی پایه‌ی $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ متشکل از بردارهای ویژه‌ی S و T وجود دارد. فرض کنید $A=[T]_{\mathcal{B}}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots\lambda_n)$ و $B=[S]_{\mathcal{B}}=\operatorname{diag}(\mu_1,\dots\mu_n)$. نشان می‌دهیم که اسکالرهای $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in F$ وجود دارند به طوری که $S=a_0\mathrm{id}_V+a_1T+\cdots+a_{n-1}T^{n-1}$ ذاس ماتریس T نسبت پایه‌ی $\mathcal{B}$ باشد. در این صورت چون $Sv_i=\mu_iv_i$ باید این اسکالرها در رابطه‌های زیر صدق کنند

$$\mu_iv_i=Sv_i=a_0v_i+a_1Tv_i+\cdots+a_{n-1}T^{n-1}v_i,\quad i=1,\dots,n.$$

چون $T^mv_i=\lambda_i^mv_i$ پس اسکالرها (پس از حذف v_i از دو طرف تساوی) باید در رابطه‌های زیر صدق کنند

$$\mu_i=a_0+a_1\lambda_i+\cdots+a_{n-1}\lambda_i^{m-1},\quad i=1,\dots,n.$$

ماتریس ضرایب دستگاه بالا ماتریس واندرموند است و بنابراین وارون‌پذیر است. از این‌رو دستگاه بالا دارای جواب است و می‌توان اسکالرهای مناسب را تعیین کرد.

راه دوم:

به صورت ماتریسی مساله را حل می‌کنیم. چون A قطری شدنی است، پایه‌ی $\mathscr{B}$ برای F^n متشکل از بردارهای ویژه‌ی A وجود دارد. هم‌چنین ماتریس وارون‌پذیر P وجود دارد که $P^{-1}AP=D$ قطری است. فرض کنید B یک ماتریس باشد که $AB=BA$. طبق اثبات تمرین ۶ از صفحه ۱۷۳، پایه‌ی $\mathscr{B}$ F^n متشکل از بردارهای ویژه‌ی B است. هم‌چنین $P^{-1}BP=C=\operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ قطری است. بنابراین $P^{-1}BP=\sum_{i=1}^n\alpha_iE_{ii}$ و در نتیجه $B=\sum_{i=1}^nPE_{ii}P^{-1}$. چون

$$PE_{ii}P^{-1}A=PE_{ii}P^{-1}APP^{-1}=PE_{ii}DP^{-1}=PDE_{ii}P^{-1}=PDP^{-1}PE_{ii}P^{-1}=APE_{ii}P^{-1}$$

نتیجه می‌گیریم که زیرفضای $W=\{B\in M_n(F)\mid AB=BA\}$ از $M_n(F)$ یک زیرفضای n بعدی است. چون A قطری شدنی با n مقدار ویژه متمایز است، چندجمله‌ای می‌نیمال A دقیقا از درجه‌ی n است. پس نتیجه می‌گیریم مجموعه $\{I,A,\dots,A^{n-1}\}$ یک مجموعه مستقل خط در W و بنابراین یک پایه W است. پس هر عضو W ترکیب خطی از I، A، ...، A^{n-1} و در نتیجه یک چند جمله‌ای با درجه‌ی حداکث n بر حسب A است.

۹.

حل تمرین‌های بخش ۴.۵ صفحه‌ی ۲۱۵

۱.

۲.

۳.

۴.

۵.

۶. (آ) در تمرین (آ) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = (x-4)(x+2)^2$ است، بردار $X_1 = (0, 1, 1)^\top$ بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۴ و بردار $X_2 = (1, 1, 0)^\top$ بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۲− است. بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x) = (x-4)(x+2)^2$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1, X_2, X_3\}$ کافی است بردار X_3 را طوری بیابیم که $AX_3 = 0X_1 + X_2 - 2X_3$، یعنی $(A+2I)X_3 = X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -7 & 7 & -1 & 1 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3/6 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -7 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[7R_3 + R_2 \to R_2]{R_3 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_3 = -1$ و $x_1 - x_2 = 0$ و قرار می‌دهیم $X_3 = (1, 1, -1)^\top$.

(ب) در تمرین (ب) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = x(x-1)^2$ است، بردار $X_1 = (1, 1, 0)^\top$ بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۰ و بردار $X_2 = (1, 1, 1)^\top$ بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۱ است. بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x) = x(x-1)^2$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1, X_2, X_3\}$ کافی است بردار X_3 را طوری بیابیم که $AX_3 = 0X_1 + X_2 + X_3$، یعنی $(A - I)X_3 = X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری

مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_3 + R_2 \to R_2]{-2R_3 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

بنابراین $-x_2 + x_3 = -1$ و $-x_1 + x_2 = 1$ و در نتیجه قرار می‌دهیم $X_3 = (-1, 0, -1)^\top$.

(پ) در تمرین (پ) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = (x-2)^3$ است، و دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی $Y_1 = (7, 1, 0)^\top$ و $Y_2 = (4, 0, 1)^\top$ متناظر ۲ وجود دارند. بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x) = (x-2)^2$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان باید بردارهای مستقل خطی $\{X_1, X_2, X_3\}$ را طوری تعیین کنیم که

$$AX_1 = 2X_1, \qquad AX_2 = 2X_2, \qquad AX_3 = X_2 + 2X_3.$$

بردارهای X_1 و X_2 بردارهای ویژه متناظر با ۲ هستند و X_3 جواب دستگاه $(A - 2I)X = X_2$ است. برای تعیین X_2 ترکیب خطی مناسب

$$X_2 = aY_1 + bY_2 = \begin{bmatrix} 7a + 4b \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

از بردارهای ویژه را در نظر می‌گیریم واسکالرهای a و b را طوری تعیین می‌کنیم که دستگاه $(A - 2I)X = X_2$ دارای جواب باشد. ماتریس افزوده‌ی دستگاه

$$(A - 2I)X = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -4 \\ -1 & 7 & 4 \\ 2 & -14 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7a + 4b \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم و با انجام اعمال سطری مقدماتی دستگاه را ساده‌تر می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -7 & -4 & 7a + 4b \\ -1 & 7 & 4 & a \\ 2 & -14 & -8 & b \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_1 + R_3 \to R_3]{R_1 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -7 & -4 & 7a + 4b \\ 0 & 0 & 0 & 8a + 4b \\ 0 & 0 & 0 & -14a - 7b \end{array}\right]$$

بنابراین برای این که دستگاه دارای جواب باشد باید داشته باشیم $2a+b=0$، یعنی $b=-2a$. مثلاً قرار می‌دهیم $a=1$ و $b=-2$. در نتیجه به ازای

$$X_2 = \begin{bmatrix} 7a+4b \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

دستگاه $(A-I)X = X_2$ به صورت $x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -1$ در می‌آید. پس می‌توان مثلاً قرار $x_2 = x_3 = 0$ و $x_1 = -1$ و جوابی از دستگاه $(A-2I)X = X_2$ را به دست آورد: $X_3 = (-1, 0, 0)^\top$. در نهایت چون X_1 بردار ویژه است، مثلاً می‌توان قرار داد $X_1 = (7, 1, 0)^\top$. در نتیجه پایه‌ی ژردان $\{X_1, X_2, X_3\}$ برای ماتریس A به دست می‌آید. اگر قرار دهیم

$$P = [X_1\ X_2\ X_3] = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

آن‌گاه $P^{-1}AP = J$.

(ت) در تمرین (ت) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = (x-1)^3$ است، بردار $X_1 = (1, -1, 1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۱ و بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x) = (x-1)^3$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1, X_2, X_3\}$ ابتدا بردار X_2 را طوری می‌یابیم که $AX_2 = X_1 + X_2$، یعنی $(A-I)X_2 = X_1$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3R_2+R_1 \to R_1]{R_2+R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_1 - x_3 = 1$ و $x_2 + x_3 = 0$ و قرار می‌دهیم $X_2 = (1, 0, 0)^\top$. اکنون بردار X_3 را طوری می‌یابیم که $AX_3 = X_2 + X_3$، یعنی $(A-I)X_3 = X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل

می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3R_2+R_1 \to R_1]{R_2+R_3 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_1 - x_3 = -2$ و $x_2 + x_3 = 1$ و قرار می‌دهیم $X_3 = (-2, 1, 0)^\top$.

(ث) در تمرین (ث) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = (x+1)^3$ است، و تنها دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی $Y_1 = (1, 0, 4)^\top$ و $Y_2 = (0, 1, -3)^\top$ متناظر -1 وجود دارند. بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x) = (x-1)^2$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان باید بردارهای مستقل خطی $\{X_1, X_2, X_3\}$ را طوری تعیین کنیم که

$$AX_1 = -X_1, \qquad X_2 = -X_2, \qquad AX_3 = X_2 - X_3.$$

بردارهای X_1 و X_2 بردارهای ویژه متناظر با -1 هستند و X_3 جواب دستگاه $(A+I)X = X_2$ است. برای تعیین X_2 ترکیب خطی مناسب

$$X_2 = aY_1 + bY_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 4a - 3b \end{bmatrix}$$

از بردارهای ویژه را در نظر می‌گیریم واسکالرهای a و b را طوری تعیین می‌کنیم که دستگاه $(A+I)X = X_2$ دارای جواب باشد. ماتریس افزوده‌ی دستگاه

$$(A+I)X = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 4a - 3b \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم و با انجام اعمال سطری مقدماتی دستگاه را ساده‌تر می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -4 & 3 & 1 & a \\ -4 & 3 & 1 & b \\ -4 & 3 & 1 & 4a - 3b \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{-R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} -4 & 3 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b - a \\ 0 & 0 & 0 & 3a - 3b \end{array}\right]$$

بنابراین برای این‌که دستگاه دارای جواب باشد باید داشته باشیم $a-b=0$، یعنی $a=b$. مثلاً قرار می‌دهیم $a=b=1$. در نتیجه به ازای

$$X_2=\begin{bmatrix} a \\ b \\ 4a-3b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دستگاه $(A-I)X=X_2$ به صورت $-4x_1+3x_2+x_3=1$ در می‌آید. پس می‌توان مثلاً قرار $x_1=x_2=0$ و $x_3=1$ و جوابی از دستگاه $(A+I)X=X_2$ را به دست آورد: $X_3=(0,0,1)^\top$. در نهایت چون X_1 بردار ویژه است، مثلاً می‌توان قرار داد $X_1=(1,0,4)^\top$. در نتیجه پایه‌ی ژردان $\{X_1,X_2,X_3\}$ برای ماتریس A به دست می‌آید. اگر قرار دهیم

$$P=[X_1\;X_2\;X_3]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

آن‌گاه $P^{-1}AP=J$.

(ج) در تمرین (ج) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x)=(x+3)^3$ است، بردار $X_1=(-1,-2,1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۳− و بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x)=(x+3)^3$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1,X_2,X_3\}$ ابتدا بردار X_2 را طوری می‌یابیم که $AX_2=X_1-3X_2$، یعنی $(A+3I)X_2=X_1$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -6 & -1 \\ -7 & 2 & -3 & -2 \\ 8 & -1 & 6 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -6 & -1 \\ 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2/9\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{8R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_1+x_3=0$ و $x_2+2x_3=-1$ و قرار می‌دهیم $X_2=(0,-1,0)^\top$. اکنون بردار X_3 را طوری می‌یابیم که $AX_3=X_2-3X_3$، یعنی $(A+3I)X_3=X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -6 & 0 \\ -7 & 2 & -3 & -1 \\ 8 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -6 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2/9\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{8R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -\frac{8}{9} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_2+2x_3=-\frac{8}{9}$ و $x_1+x_3=-\frac{1}{9}$ و قرار می‌دهیم $X_3=(-\frac{1}{9},-\frac{8}{9},0)^\top$.

(چ) در تمرین (چ) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x)=(x-2)^4$ است، بردار $X_1=(1,1,0,0)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۲ و بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x)=(x-2)^4$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ ابتدا بردار X_2 را طوری می‌یابیم که $AX_2=X_1+2X_2$، یعنی $(A-2I)X_2=X_1$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_3+R_4\to R_4]{-R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2R_3+R_2\to R_2]{-R_3+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_2+R_3\to R_3]{R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $-x_1 + x_2 = 1$، $x_4 = 0$ و $x_3 = 0$ و قرار می‌دهیم $X_2 = (1, 2, 0, 0)^\top$. اکنون بردار X_3 را طوری می‌یابیم که $AX_3 = X_2 + 2X_3$، یعنی $(A - 2I)X_3 = X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow[-R_3+R_4\to R_4]{-R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2R_3+R_2\to R_2]{-R_3+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_2+R_3\to R_3]{R_2+R_1\to R_1}\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $-x_1 + x_2 = 2$، $x_4 = 1$ و $-x_3 = -1$ و قرار می‌دهیم $X_2 = (-2, 0, 1, 1)^\top$.

(ح) در تمرین (ح) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = x^2(x-1)^2$ است، بردار $X_1 = (0, 0, 1, -1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۱ و بردار $X_3 = (1, -1, 0, 0)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۰.
بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x) = x^2(x-1)^2$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ ابتدا بردار X_2 را طوری می‌یابیم که $AX_2 = X_1 + X_2$، یعنی $(A - I)X_2 = X_1$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی

این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]\xrightarrow[-R_1+R_4\to R_4]{\substack{2R_1+R_2\to R_2\\ 2R_1+R_3\to R_3}}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2+R_4\to R_4}\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_2 = 0$، $x_1 = 0$ و $x_3 + x_4 = 1$ و قرار می‌دهیم $X_2 = (0, 0, 1, 0)^\top$. اکنون بردار X_4 را طوری می‌یابیم که $AX_4 = X_3$. ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]\xrightarrow[-R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\ 2R_1+R_3\to R_3}}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_4+R_3\to R_3}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_1 + x_2 = 1$، $x_4 = 0$ و $-x_3 = -1$ و قرار می‌دهیم $X_2 = (1, 0, -1, 0)^\top$.

(خ) در تمرین (خ) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = (x+1)(x-1)^3$ است، بردار $X_1 = (3, -1, 1, 9)^\top$ بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۱− و بردار $X_2 = (-1, 1, 1, 1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۱.
بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x) = (x+1)(x-1)^3$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ ابتدا بردار X_3 را طوری می‌یابیم که $AX_3 = X_2 + X_3$، یعنی $(A - I)X_3 = X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال

سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\ R_1+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3R_3+R_4\to R_4]{\substack{R_3+R_1\to R_1\\ -2R_3+R_2\to R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $-x_2+x_4=-1$، $x_1+x_4=0$ و $x_3-x_4=0$ و قرار می‌دهیم $X_3=(0,1,0,0)^\top$. اکنون بردار X_4 را طوری می‌یابیم که $AX_4=X_3+X_4$، یعنی $(A-I)X_4=X_3$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\ R_1+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3R_3+R_4\to R_4]{\substack{R_3+R_1\to R_1\\ -2R_3+R_2\to R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $-x_2+x_4=2$، $x_1+x_4=1$ و $x_3-x_4=0$ و قرار می‌دهیم $X_2=(1,-2,0,0)^\top$.

(د) در تمرین (د) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x)=(x-1)^2(x+1)^2$ است، بردار $X_1=(1,0,0,1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر -1 و بردار $X_3=(5,2,2,1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۱.

بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x)=(x-1)^2(x+1)^2$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ ابتدا بردار X_2 را طوری می‌یابیم که $AX_2=X_1-X_2$، یعنی $(A+I)X_2=X_1$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_4+R_3\to R_3]{\substack{-2R_4+R_1\to R_1\\ -2R_4+R_2\to R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_2/2+R_4\to R_4]{\substack{-2R_2+R_1\to R_1\\ -R_2+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3R_3+R_4\to R_4]{\substack{-3R_3+R_1\to R_1\\ 2R_3+R_2\to R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_2=0$، $x_3=1$ و $-x_1+x_4=-1$ و قرار می‌دهیم $X_3=(1,0,1,0)^\top$. اکنون بردار X_4 را طوری می‌یابیم که $AX_4=X_2+X_4$، یعنی $(A-I)X_4=X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2/2\to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 6 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2+R_4\to R_4]{\substack{4R_2+R_1\to R_1\\ R_2+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3/2 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3 + R_2 \to R_2]{-2R_3 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 + R_3 \to R_3]{\substack{-R_4 + R_1 \to R_1 \\ 2R_4 + R_2 \to R_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_1 - 5x_4 = \frac{1}{2}$، $x_2 - 2x_4 = \frac{3}{2}$ و $x_3 - 2x_4 = 0$ و قرار می‌دهیم $X_4 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0)^\top$.

(ذ) در تمرین (ذ) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ است، بردار $X_1 = (1, -1, 3, 1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۱− و بردار $X_3 = (1, 1, 1, 1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۱. بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ ابتدا بردار X_2 را طوری می‌یابیم که $AX_2 = X_1 - X_2$، یعنی $(A+I)X_2 = X_1$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1 + R_4 \to R_4]{\substack{-R_1 + R_2 \to R_2 \\ -2R_1 + R_3 \to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2R_3 + R_2 \to R_2]{R_3 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2/2 + R_3 \to R_3]{-R_2/2 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_2 + x_4 = 2$، $x_1 + x_2 = 0$ و $-3x_2 - x_3 = 1$ و قرار می‌دهیم $X_3 = (0, 0, -1, 2)^\top$ اکنون بردار X_4 را طوری می‌یابیم که $AX_4 = X_2 + X_4$، یعنی $(A-I)X_4 = X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 + R_4 \to R_4]{\substack{-R_1 + R_2 \to R_2 \\ -2R_1 + R_3 \to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2/2 \to R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & -1 \\ -6 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_2 + R_4 \to R_4]{\substack{-R_2 + R_1 \to R_1 \\ 3R_2 + R_3 \to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3/2 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-4R_3 + R_4 \to R_4]{-2R_3 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $-x_1 + x_4 = 0$، $-x_1 + x_3 = 0$ و $-x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ و قرار می‌دهیم $X_4 = (0, \frac{1}{2}, 0, 0)^\top$.

(ر) در تمرین (ر) از صفحه‌ی ؟؟ دیدیم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای A برابر $\chi(x) = (x+4)^4$ است، بردار

$X_1=(1,1,-1,1)^\top$ تنها بردار ویژه مستقل خطی متناظر ۴− و بنابراین A قطری‌شدنی نیست و فرم ژردان A ماتریس

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای می‌نیمال A برابر $m(x)=(x+4)^4$ است. اکنون برای یافتن پایه‌ی ژردان $\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ ابتدا بردار X_2 را طوری می‌یابیم که $AX_2=X_1+X_2$، یعنی $(A+4I)X_2=X_1$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -11 & 3 & -9 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 3 & 1\\ 15 & -7 & 13 & 5 & -1\\ -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[3R_2+R_4\to R_4]{\substack{11R_2+R_1\to R_1\\ -15R_2+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -8 & 24 & 32 & 12\\ 1 & -1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 8 & -32 & -40 & -16\\ 0 & 0 & 8 & 8 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3/8\to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -8 & 24 & 32 & 12\\ 1 & -1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 4 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 8 & 8 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_2\to R_2]{-8R_3+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -8 & -8 & -4\\ 1 & 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 8 & 8 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4/8\to R_4]{-R_1/8\to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & \frac12\\ 1 & 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 4 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\ -4R_1+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & \frac12\\ 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac12\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_3+x_4=\frac12$، $x_1-x_4=-\frac12$ و $-x_2+x_4=0$ و قرار می‌دهیم $X_2=(-\frac12,0,\frac12,0)^\top$. اکنون بردار X_3 را طوری می‌یابیم که $AX_3=X_2-4X_3$، یعنی $(A+4I)X_3=X_2$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این

دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -11 & 3 & -9 & -1 & -\frac12\\ 1 & -1 & 3 & 3 & 0\\ 15 & -7 & 13 & 5 & \frac12\\ -3 & 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[3R_2+R_4\to R_4]{\substack{11R_2+R_1\to R_1\\ -15R_2+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -8 & 24 & 32 & -\frac12\\ 1 & -1 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 8 & -32 & -40 & \frac12\\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3/8\to R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -8 & 24 & 32 & -\frac12\\ 1 & -1 & 3 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 5 & -\frac1{16}\\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_2\to R_2]{-8R_3+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -8 & -8 & 0\\ 1 & 0 & -1 & -2 & \frac1{16}\\ 0 & -1 & 4 & 5 & -\frac1{16}\\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4/8\to R_4]{-R_1/8\to R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & -2 & \frac1{16}\\ 0 & -1 & 4 & 5 & -\frac1{16}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_4\to R_4]{\substack{R_1+R_2\to R_2\\ -4R_1+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & \frac1{16}\\ 0 & -1 & 0 & 1 & -\frac1{16}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_3+x_4=0$، $x_1-x_4=\frac1{16}$ و $-x_2+x_4=-\frac1{16}$ و قرار می‌دهیم $X_3=(\frac1{16},\frac1{16},0,0)^\top$. درنهایت بردار X_4 را طوری می‌یابیم که $AX_4=X_3-4X_4$، یعنی $(A+4I)X_4=X_3$ ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم و با انجام اعمال سطری مقدماتی این دستگاه را حل می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -11 & 3 & -9 & -1 & \frac1{16}\\ 1 & -1 & 3 & 3 & \frac1{16}\\ 15 & -7 & 13 & 5 & 0\\ -3 & 3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[3R_2+R_4\to R_4]{\substack{11R_2+R_1\to R_1\\ -15R_2+R_3\to R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -8 & 24 & 32 & \frac{12}{16}\\ 1 & -1 & 3 & 3 & \frac1{16}\\ 0 & 8 & -32 & -40 & -\frac{15}{16}\\ 0 & 0 & 8 & 8 & \frac3{16} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_3/8 \to R_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & -8 & 24 & 32 & \frac{12}{16} \\ 1 & -1 & 3 & 3 & \frac{1}{16} \\ 0 & -1 & 4 & 5 & \frac{15}{128} \\ 0 & 0 & 8 & 8 & \frac{3}{16} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_3+R_2 \to R_2]{-8R_3+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & -8 & -8 & -\frac{3}{16} \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -\frac{7}{128} \\ 0 & -1 & 4 & 5 & \frac{15}{128} \\ 0 & 0 & 8 & 8 & \frac{3}{16} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4/8 \to R_4]{-R_1/8 \to R_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{128} \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -\frac{7}{128} \\ 0 & -1 & 4 & 5 & \frac{15}{128} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{128} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_4 \to R_4]{\substack{R_1+R_2 \to R_2 \\ -4R_1+R_3 \to R_3}} \left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{128} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{128} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{3}{128} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

بنابراین $x_3 + x_4 = \frac{3}{128}$، $x_1 - x_4 = -\frac{4}{128}$ و $-x_2 + x_4 = \frac{3}{128}$ و قرار می‌دهیم $X_3 = (-\frac{4}{128}, -\frac{3}{128}, \frac{3}{128}, 0)^\top$.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

حل برخی از تمرین‌ها، ویرایش اول (ممکن است ایراد وجود داشته باشد)

(حل تمرین‌های فصل ۶)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

حل تمرین‌های بخش ۱.۶ صفحه‌ی ۲۲۴

حل تمرین‌های بخش ۲.۶ صفحه‌ی ۲۲۹

.۱

.۲

.۳

.۴

.۵

.۶

.۷

حل تمرین‌های بخش ۳.۶ صفحه‌ی ۲۴۱

.۱

.۲

.۳

.۴

.۵ با توجه به ؟؟ قرار می‌دهیم $u = A_{*1} - \|A_{*1}\| e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$، بنابراین

$$R_1 = I - 2\frac{uu^*}{u^*u} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad R_1A = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 10 & -53 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & 14 \end{bmatrix}.$$

اکنون از $\begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\widehat{R_2} = I - 2\frac{uu^*}{u^*u} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad R_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

پس

$$R_2R_1A = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

در نهایت از $\begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$ $u = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix}$ استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\widehat{R_3} = I - 2\frac{uu^*}{u^*u} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad R_3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

پس

$$R_3R_2R_1A = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

از این‌رو $PA = T = \begin{bmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$، که در آن

$$P^\top = R_3R_2R_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 12 & 6 & -6 & 3 \\ 9 & -8 & 8 & -4 \\ 0 & -5 & 2 & 14 \\ 0 & -10 & -11 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad R = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از سه ستون اول ماتریس

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 12 & 9 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & -5 & -10 \\ 6 & 8 & 2 & -11 \\ 3 & -4 & 14 & -2 \end{bmatrix}$$

پایه‌ی متعامد یکه برای $\operatorname{Im} A$ تشکیل می‌دهند. چون درایه‌های قطری R مثبت هستند

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 6 & -8 & -5 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & -4 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} = A$$

تجزیه‌ی A است.؟؟؟؟؟؟؟

حل تمرین‌های بخش ۴.۶ صفحه‌ی ۲۵۰

۱.

۲.

۳.

۴.

۵. طبق قضیه‌ی ؟؟ از صفحه‌ی ؟؟ ماتریس‌های حقیقی نرمال هستند و مقادیر ویژه‌ی آن‌ها حقیقی هستند. پس عکس مطلب را ثابت می‌کنیم. فرض کنید A یک ماتریس نرمال با مقادیر ویژه‌ی حقیقی باشد. در این صورت طبق قضیه‌ی ؟؟ از صفحه‌ی ؟؟ به طور متعامد قطری شدنی است، یعنی ماتریس متعامد P وجود دارد که $P^\top AP = D$ یک ماتریس قطری است. بنابراین $A = PDP^\top$ و در نتیجه $A^\top = (PDP^\top)^\top = (P^\top)^\top D^\top P^\top = PDP^\top = A$.

۶.

۷.

۸.

۹.

۱۰.

۱۱.

۱۲.

۱۳.

۱۴.

۱۵.

حل تمرین‌های بخش ۵.۶ صفحه‌ی ۲۵۸

۱.

۲.

حل تمرین‌های بخش ۶.۶ صفحه‌ی ۲۷۰

۱.

۲.

۳.

۴.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

حل برخی از تمرین‌ها، ویرایش اول (ممکن است ایراد وجود داشته باشد)

(حل تمرین‌های فصل ۷)

دکتر بیژن طائری

دانشکده‌ی علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی اصفهان

حل تمرین‌های بخش ۱.۷ صفحه‌ی ۲۸۰

۱.
۲.
۳.

حل تمرین‌های بخش ۲.۷ صفحه‌ی ۲۸۸

۱.
۲.
۳.

حل تمرین‌های بخش ۳.۷ صفحه‌ی ۲۹۷

۱.
۲.
۳.
۴.
۵.

حل تمرین‌های بخش ۴.۷ صفحه‌ی ۳۰۸

۱.
۲.
۳.
۴.
۵.

حل تمرین‌های بخش ۵.۷ صفحه‌ی ۳۱۶

۱.
۲.
۳.
۴.
۵.

حل تمرین‌های بخش ۶.۷ صفحه‌ی ۳۳۶

۱.

۲.

۳.

۴.

۵.

۶.

۷.

۸.

۹.

۱۰.

۱۱.

۱۲.

۱۳.

حل تمرین‌های بخش ۷.۷ صفحه‌ی ۳۵۰

۱.

۲.

۳. (پ) با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم $|Y^*AX| \le \|Y\|_2\|AX\|_2$ که نتیجه می‌دهد

$$\max_{\substack{\|X\|_2=1\\ \|Y\|_2=1}} |Y^*AX| \le \max_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2 = \|A\|_2 .$$

برای این‌که نشان دهیم در رابطه‌ی بالا تساوی رخ می‌دهد، نشان می‌دهیم X و Y روی ۲-کره‌ی واحد وجود دارند که در رابطه‌ی بالا به ازای آن‌ها تساوی رخ می‌دهد. برای دیدن این مطلب توجه کنید که اگر X_0 یک بردار یکه باشد به طوری‌که

$$\|AX_0\|_2 = \max_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2 = \|A\|_2$$

و قرار دهیم $Y_0 = \dfrac{AX_0}{\|AX_0\|_2} = \dfrac{AX_0}{\|A\|_2}$، آن‌گاه

$$Y_0^*AX_0 = \frac{X_0A^*AX_0}{\|A\|_2} = \frac{\|AX_0\|_2^2}{\|A\|_2} = \frac{\|A\|_2^2}{\|A\|_2} = \|A\|_2 .$$

(ب) این مطلب بلافاصله از (آ) نتیجه می‌شود، زیرا

$$\|A\|_2 = \max_{\substack{\|X\|_2=1\\ \|Y\|_2=1}} |Y^*AX| = \max_{\substack{\|X\|_2=1\\ \|Y\|_2=1}} |(Y^*AX)^*| = \max_{\substack{\|X\|_2=1\\ \|Y\|_2=1}} |X^*AY| = \|A^*\|_2 .$$

(آ) با استفاده ه از (آ) و نامساوی کشی-شوارتز داریم

$$\|A^*A\|_2 \max_{\substack{\|X\|_2=1\\ \|Y\|_2=1}} |Y^*A^*AX| \le \max_{\substack{\|X\|_2=1\\ \|Y\|_2=1}} \|AY\|_2 \|AX\|_2 = \|A\|_2^2 .$$

برای این‌که نشان دهیم در رابطه‌ی بالا تساوی رخ می‌دهد، فرض می‌کنیم $X = Y = X_0$، که در آن X_0 یک بردار یکه است به طوری‌که $\|AX_0\|_2 = \max_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2 = \|A\|$ و ملاحظه می کنیم که

$$|X_0^*A^*AX_0| = X_0A^*AX_0 = \|AX_0\|_2^2 = \|A\|_2^2 .$$

۴. چون $UU^* = I$ داریم

$$\|U^*AX\|_2^2 = X^*A^*UU^*AX = X^*A^*AX = \|AX\|_2^2 ,$$

و بنابراین

$$\|U^*A\|_2 = \max_{\|X\|_2=1} \|U^*AX\|_2 = \max_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2 = \|A\|_2 .$$

اکنون چون $UU^* = I$ با توجه به این‌که $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$ (تمرین قبل) داریم

$$\|AV\|_2 = \|(AV)^*\|_2 = \|V^*A^*\|_2 = \|A*\|_2 = \|A\|_2 ,$$

و در نتیجه $\|U^*AV\|_2 = \|A\|_2$.

۵.

۶. (آ) برای $X = \mathbf{0}$ حکم بدیهی است. برای $X \neq \mathbf{0}$ داریم $\left\|\frac{X}{\|X\|}\right\| = 1$. پس به ازای هر $X_0 \neq \mathbf{0}$ ثابت داریم

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| = \max_{X\neq\mathbf{0}} \left\|A\frac{X}{\|X\|}\right\| \ge \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$$

و در نتیجه $\|AX_0\| \le \|A\|\,\|X_0\|$.

(ب) فرض کنید X_0 یک بردار یکه باشد و

$$\|ABX_0\| = \max_{\|X\|=1} \|ABX\| = \|AB\| .$$

با استفاده از (آ) نتیجه می‌گیریم که

$$\|AB\| = \|ABX_0\| \le \|A\|\,\|BX_0\| \le \|A\|\,\|B\|\,\|X_0\| = \|A\|\,\|B\| .$$

(ج) چون $\{X \mid \|X\| = 1\} \subseteq \{X \mid \|X\| \le 1\}$ داریم

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| \le \max_{\|X\|\le 1} \|AX\| .$$

اگر بردار x_0 وجود داشته باشد که $\|X_0\| < 1$ و $\|A\| < \|AX_0\|$، آن‌گاه با استفاده از (آ) نتیجه می‌گیریم که $\|A\| < \|AX_0\| \le \|A\|\,\|X_0\| < \|A\|$، که ممکن نیست.

۷.

.۸

.۹ داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{\min\limits_{\|X\|=1}\left\|A^{-1}X\right\|} &= \max_{\|X\|=1}\frac{1}{\|A^{-1}X\|} = \max_{Y\neq\mathbf{0}}\frac{1}{\left\|A^{-1}\frac{AY}{\|AY\|}\right\|}\\ &= \max_{Y\neq\mathbf{0}}\frac{\|AY\|}{\|A^{-1}(AY)\|} = \max_{Y\neq\mathbf{0}}\frac{\|AY\|}{\|Y\|}\\ &= \max_{Y\neq\mathbf{0}}\left\|A\frac{Y}{\|Y\|}\right\|\\ &= \max_{\|X\|=1}\|AX\| = \|A\|\,.\end{aligned}$$

.۱۰

.۱۱

.۱۲