استفاده از روش کاهش مرتبه کار دشواری است. اکنون ثابت می‌کنیم جواب دوم معادله به صورت زیر است

$$y_۲(x) = y_۱(x)\ln x + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n x^{n+r_۱}$$

که در آن $b_n = a'_n(r_۱)$ یعنی

$$b_n = \frac{d}{dr}a_n(r)\bigg|_{r=r_۱}.$$

دیدیم که اگر $y = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{n+r}$ را در معادله قرار دهیم داریم

$$\begin{aligned} L[y] &= F(r)a_۰x^r + \sum_{n=۱}^{\infty}\bigg\{ F(r+n)a_n \\ &\quad + \sum_{k=۰}^{n-۱}\left[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k\bigg\} x^{r+n} = ۰ \end{aligned}$$

r را به عنوان متغیر در نظر می‌گیریم و a_n را به صورت تابعی از r طوری فرض می‌کنیم که ضرایب x^{r+n} در رابطه‌ی بالا صفر شوند، آنگاه با فرض این‌که $F(r+n) \neq ۰$ داریم

$$a_n(r) = -\frac{\sum_{k=۰}^{n-۱}\left[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k}{F(r+n)}$$

بنابر این با انتخاب این مقدار برای $a_n(r)$ داریم

$$L[y](r,x) = a_۰x^rF(r).$$

چون $r_۱$ ریشه مضاعف $F(r)$ است پس $F(r) = (r-r_۱)^۲$ در نتیجه

$$L[y](r,x) = a_۰x^r(r-r_۱)^۲ \tag{۹}$$

چون $L[y](r_۱,x) = ۰$ پس یک جواب به صورت

$$y_۱(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n(r_۱)x^{n+r_۱}$$

است. اکنون مثل روشی که برای یافتن جواب دوم در معادله با ضرایب ثابت و معادله‌ی اویلر بکار بردیم از طرفین (۹) نسبت به r مشتق می‌گیریم

$$\frac{\partial}{\partial r}L[y](r,x) = \frac{\partial}{\partial r}(a_۰x^r(r-r_۱)^۲).$$

در نتیجه

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r}y\right](r,x) = a_\circ x^r(r-r_\text{۱})^\text{۲}\ln x + \text{۲}a_\circ x^r(r-r_\text{۱}).$$

با قرار دادن $r = r_\text{۱}$ در رابطه‌ی اخیر داریم

$$L\left[\frac{\partial}{\partial r}y\right](r_\text{۱},x) = \circ.$$

در نتیجه $\frac{\partial}{\partial r}y(r_\text{۱},x)$ $= y_\text{۲}$ یک جواب معادله است. بنابر این (مطابق معمول با فرض $(a_\circ = \text{۱}$

$$\begin{aligned} y_\text{۲} &= \left.\frac{\partial}{\partial r}y(x,r)\right|_{r=r_\text{۱}} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(r)x^{n+r}\right]_{r=r_\text{۱}} \\ &= \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(r_\text{۱})x^{n+r_\text{۱}}\ln x + \sum_{n=\circ}^{\infty} a'_n(r_\text{۱})x^{n+r_\text{۱}} \\ &= y_\text{۱}(x)\ln x + \sum_{n=\text{۱}}^{\infty} a'_n(r_\text{۱})x^{n+r_\text{۱}}. \end{aligned}$$

مثال ۵ با استفاده از روش فروبنیوس معادله‌ی زیر را که به **معادله‌ی بسل** از رتبه‌ی صفر معروف است را حول $x = \circ$ حل کنید

$$xy'' + y' + xy = \circ; \quad x > \circ.$$

حل نقطه‌ی $x = \circ$ نقطه‌ی غیرعادی منظم معادله است. اگر معادله را به صورت استاندارد

$$x^\text{۲}y'' + xy' + x^\text{۲}y = \circ$$

بنویسیم داریم $xp(x) = \text{۱}$ و $x^\text{۲}q(x) = x^\text{۲}$؛ در نتیجه

$$p_\circ = \text{۱}, \;\; p_\text{۱} = p_\text{۲} = \cdots = \circ$$

$$q_\circ = \circ, \;\; q_\text{۱} = \circ, \;\; q_\text{۲} = \text{۱}, \;\; q_\text{۲} = q_\text{۳} = \cdots = \circ.$$

پس معادله‌ی شاخص عبارت است از

$$F(r) = r(r-\text{۱}) + r = r^\text{۲}$$

برای $r = r_1 = 0$ داریم

$$\begin{aligned} a'_{2n}(0) &= -2a_{2n}(0)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdots \cdot (2n)^2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right] \end{aligned}$$

و با فرض

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

داریم

$$a'_{2n}(0) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}H_n.$$

در نتیجه جواب دوم معادله عبارت است از

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}H_n x^{2n}. \ \square$$

تمرینات

با استفاده از روش فروبنیوس معادله‌های زیر را حول $x = 0$ حل کنید.

۱. $xy'' + y' - 4y = 0$ ۲. $x^2y'' - x(1+x)y' + y = 0$

۳. $4x^2y'' + 4x^2y' + (1+2x)y = 0$

۴. $x^2y'' + (x^2+3x)y' + (1+2x)y = 0$

۵. $x^2y'' + x(x-3)y' + (4-x)y = 0$

۶. $x^2y'' + x\left(\frac{1}{2}+x\right)y' + \left(\frac{1}{16}+\frac{3}{4}x\right)y = 0$

حالتی که تفاضل دو ریشه معادله‌ی شاخص عدد طبیعی N است و $a_N(r_2)$ دل‌خواه. قبلا مثال ۳ در این رابطه آورده شده است؛ مثال دیگری نیز ارائه می‌کنیم.

مثال ۶ با استفاده از روش فروبنیوس معادله‌ی

$$xy'' + (x-1)y' - y = 0; \quad x > 0$$

را حول $x = 0$ حل کنید.

$\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. نشان دهید، برای s به اندازه کافی بزرگ، $sF(s)$ تابعی کراندار است.

۲. نشان دهید توابع زیر از رتبه‌ی نمائی هستند.

(آ) $e^{\sqrt{x}}$ (ب) $x^{1/2}$ (پ) $\ln(1+x)$

۳. نشان دهید e^{x^2} از رتبه‌ی نمائی نیست.

۴. نشان دهید تبدیل لاپلاس e^{x^2} وجود ندارد. [راهنمائی: نشان دهید به ازای هر $x > s+1$، x، داریم $e^{x^2 - sx} > e^x$.]

۵. نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در $[0, 1]$ غیر از $x = 0$ پیوسته است، ولی پیوسته‌ی قطعه‌ای نیست.

اکنون می خواهیم ببینیم که چگونه می‌توان با استفاده از تبدیل لاپلاس یک معادله دیفرانسیل را حل کرد. در ابتدای فصل گفتیم که تبدیل لاپلاس را روی معادله اثر می‌دهیم و از خاصیت خطی بودن آن استفاده کرده و معادله را به یک معادله‌ی جبری تبدیل می‌کنیم؛ بنابر این حالا مسأله این است که مشتق‌های یک تابع چه ارتباطی با خود تابع دارند؟ قضیه‌ی زیر این ارتباط را مشخص می‌کند.

قضیه ۳ فرض کنید f در $[0, +\infty)$ پیوسته و از رتبه‌ی نمائی، ($|f(x)| \leq Me^{ax}$) و f' پیوسته‌ی قطعه‌ای باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس f' به ازای $s > a$ وجود دارد؛ علاوه بر آن داریم

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s\mathcal{L}[f(x)] - f(0).$$

اثبات قضیه را در حالت پیوستگی f' ثابت می‌کنیم. در حالت کلی باید انتگرال را روی نقاط ناپیوستگی تابع شکست. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(x)] &= \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-sx} f'(x)\, dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} e^{-sx} f(x)\Big]_0^A + \lim_{A\to+\infty} s\int_0^A e^{-sx} f(x)\, dx \\
&= \lim_{A\to+\infty} [e^{-sA} f(A) - f(0)] + s\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx \\
&= -f(0) + s\mathcal{L}[f(x)].
\end{aligned}$$

[در مرحله‌ی سوم چون تابع $f(x)$ از رتبه‌ی نمائی است داریم $|f(x)| \leq Me^{ax}$، در نتیجه $|e^{-sA} f(A)| \leq Me^{(a-s)A}$ و برای $s > a$ طرف راست نامساوی وقتی که $A \to +\infty$ به صفر میل می‌کند؛ بنابر این $\lim_{A\to+\infty} e^{-sA} f(A) = 0$.] □

مثال ۱۱ تبدیل معکوس لاپلاس $\dfrac{۱}{s^۲ - ۴s + ۵}$ را بیابید.

حل داریم

$$\frac{۱}{s^۲ - ۴s + ۵} = \frac{۱}{(s-۲)^۲ + ۱}.$$

فرض کنید $F(s) = \dfrac{۱}{s^۲ + ۱}$، پس $f(x) = \mathcal{L}^{-۱}[F(s)] = \sin x$ و داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{۱}{s^۲ - ۴s + ۵}\right] &= \mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{۱}{(s-۲)^۲ + ۱}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-۱}[F(s-۲)] \\
&= e^{۲x} f(x) \\
&= e^{۲x} \sin x. \quad \square
\end{aligned}$$

مثال ۱۲ تبدیل معکوس لاپلاس $\dfrac{۱}{(s-۵)^۷}$ را بیابید.

حل اگر $F(s) = \dfrac{۱}{s^۷}$ داریم $f(x) = \mathcal{L}^{-۱}[F(s)] = \dfrac{x^۶}{۶!}$؛ بنابر این

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{۱}{(s-۵)^۷}\right] &= \mathcal{L}^{-۱}[F(s-۵)] \\
&= e^{۵x} f(x) \\
&= \frac{۱}{۶!} e^{۵x} x^۶. \quad \square
\end{aligned}$$

مثال ۱۳ تبدیل معکوس لاپلاس $\dfrac{s}{s^۲ - ۲s + ۳}$ را بیابید.

حل داریم

$$\begin{aligned}
\frac{s}{s^۲ - ۲s + ۳} &= \frac{s}{(s-۱)^۲ + ۲} \\
&= \frac{s-۱}{(s-۱)^۲ + (\sqrt{۲})^۲} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} \frac{\sqrt{۲}}{(s-۱)^۲ + (\sqrt{۲})^۲}
\end{aligned}$$

و در نتیجه بنابه قضیه‌ی ۳ داریم

$$\mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{s}{s^۲ - ۲s + ۳}\right] = \mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{s-۱}{(s-۱)^۲ + (\sqrt{۲})^۲}\right]$$

داریم

$$\begin{cases} \alpha_0(t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) = e^t \\ -2\alpha_1(t) = e^{-t} - e^t \\ 3\alpha_1(t) + 15\alpha_2(t) = e^{4t} - e^t \end{cases}$$

از معادله‌ی دوم به دست می‌آید $\alpha_1(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ و با قرار دادن در معادله‌ی سوم داریم

$$\begin{aligned} \alpha_2(t) &= \frac{1}{15}\left[e^{4t} - e^t - 3\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{15}e^{4t} - \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{10}e^{-t} \end{aligned}$$

و با قرار دادن در معادله‌ی اول داریم

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= e^t - \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - \frac{1}{15}e^{4t} - \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{10}e^{-t} \\ &= \frac{2}{3}e^t - \frac{1}{15}e^{4t} + \frac{2}{5}e^{-t}. \end{aligned}$$

بنابر این با توجه به (۴)

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \alpha_2(t)\mathbf{A}^2 \\ &= \alpha_0(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1(t)\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \\ &\quad + \alpha_2(t)\begin{pmatrix} 16 & 18 & 18 \\ 5 & 7 & 6 \\ -5 & -6 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{4t} & \frac{6}{5}e^{4t} - \frac{6}{5}e^{4t} & \frac{6}{5}e^{4t} - \frac{6}{5}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t & \frac{2}{5}e^{4t} + e^t - \frac{2}{5}e^{-t} & \frac{2}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} \\ -\frac{1}{3}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t & -\frac{2}{3}e^{4t} - e^t - \frac{7}{5}e^{-t} & -\frac{2}{5}e^{4t} + \frac{7}{5}e^{-t} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

مثال ٤ $e^{\mathbf{A}t}$ را بیابید هرگاه

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

حل مقادیر ویژه‌ی $\mathbf{A}$ عبارت‌اند از $\pm 3i$. بنابر این از (۶) داریم

$$\alpha_۰(t) + \alpha_۱(t)۳i = e^{۳it} = \cos ۳t + i \sin ۳t$$

در نتیجه $\alpha_۰(t) = \cos ۳t$ و $\alpha_۱(t) = \frac{۱}{۳}\sin ۳t$ و بنابر این با توجه به (۴) داریم

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \alpha_۰(t)\mathbf{I} + \alpha_۱(t)\mathbf{A} \\ &= (\cos ۳t)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} + \frac{۱}{۳}\sin ۳t \begin{pmatrix} ۰ & ۳ \\ -۳ & ۰ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos ۳t & \sin ۳t \\ -\sin ۳t & \cos ۳t \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

توجه کنید در مثال بالا فقط از یک معادله استفاده کردیم؛ از معادله‌ی بعدی نیز همین نتیجه به دست می‌آید. اکنون اگر مقادیر ویژه‌ی تکراری داشته باشیم، آن‌گاه در دستگاه (۶) به اندازه کافی معادله برای تعیین $\alpha_۰$، ...، و $\alpha_{n-۱}$ وجود ندارد؛ اما می‌توان روند را طوری تغییر داد که به تعداد کافی معادله به دست آید. اگر r_i یک مقدار ویژه با تکرار ۲ باشد، آن‌گاه علاوه بر معادله‌ی (۵) معادله‌ی

$$te^{r_i t} = \alpha_۱(t) + ۲\alpha_۲(t)r_i + \cdots + (n-۱)\alpha_{n-۱}(t)r_i^{n-۲} \qquad (۷)$$

را نیز در نظر می‌گیریم. توجه کنید طرف چپ (۷) مشتق e^{rt} نسبت به r در نقطه $r = r_i$ است و طرف راست آن مشتق عبارت $\alpha_۰(t) + \alpha_۱(t)r + \cdots + \alpha_{n-۱}(t)r^{n-۱}$ نسبت به r در نقطه $r = r_i$ است. هم‌چنین اگر تعداد تکرار r_i بیشتر بود این روند را ادامه می‌دهیم مثلاً، اگر r_i با تکرار ۳ بود علاوه بر معادله‌ی (۷) معادله‌ی

$$t^۲e^{r_i t} = ۲\alpha_۲(t) + ۶\alpha_۳(t)r_i + \cdots + (n-۱)(n-۲)\alpha_{n-۱}(t)r_i^{n-۳} \qquad (۸)$$

را نیز در نظر می‌گیریم. طرف چپ رابطه‌ی اخیر مشتق دوم e^{rt} نسبت به r در نقطه $r = r_i$ است و طرف راست آن مشتق دوم عبارت $\alpha_۰(t) + \alpha_۱(t)r + \cdots + \alpha_{n-۱}(t)r^{n-۱}$ نسبت به r در نقطه $r = r_i$ است.

مثال ۵ $e^{\mathbf{A}t}$ را بیابید هرگاه

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{pmatrix}.$$

حل $r = -۱$ مقدار ویژه‌ی $\mathbf{A}$ با تکرار ۲ است؛ با توجه به معادلات (۵) و (۷) داریم

$$\begin{cases} \alpha_۰(t) - \alpha_۱(t) = e^{-t} \\ \alpha_۱(t) = te^{-t} \end{cases}$$

بنابر این $\alpha_۱(t) = te^{-t}$ و $\alpha_۰(t) = (۱+t)e^{-t}$. پس

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \alpha_۰(t)\mathbf{I} + \alpha_۱(t)\mathbf{A} \\ &= (۱+t)e^{-t}\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (۱+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (۱-t)e^{-t} \end{pmatrix}. \ \square \end{aligned}$$

تمرینات

با استفاده از روش این بخش ماتریس $e^{\mathbf{A}t}$ را محاسبه کنید که در آن $\mathbf{A}$ برابر است با

۱. $\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{pmatrix}$

۲. $\begin{pmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{pmatrix}$

۳. $\begin{pmatrix} -۴ & ۲ \\ -۳ & ۱ \end{pmatrix}$

۴. $\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \\ -۳ & ۲ \end{pmatrix}$

۵. $\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ & -۲ \\ ۳ & ۱ & -۳ \end{pmatrix}$

۶. $\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$

۷. $\begin{pmatrix} ۰ & ۲ & -۱ \\ -۱ & -۳ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{pmatrix}$

۸. $\begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ -۳ & ۲ & ۴ \end{pmatrix}$

۱۲-۵ حل دستگاه معادله دیفرانسیل با استفاده از تبدیل لاپلاس

در این بخش چگونگی استفاده از تبدیل **لاپلاس** برای حل یک دستگاه معادله دیفرانسیل را ارائه می‌کنیم. این روش را با استفاده از مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۱ دستگاه معادله‌ی زیر را حل کنید

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۶ & -۳ \\ ۱۲ & ۷ \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۴ \end{pmatrix}.$$

حل ابتدا دستگاه را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{cases} x' = ۶x - ۳y \\ y' = ۱۲x + ۷y \end{cases} \quad \mathbf{x}(\circ) = ۱, \;\; y(\circ) = ۴$$

که در آن

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

فرض کنید $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ و $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$، با گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین هر دو معادله داریم

$$\begin{cases} sX(s) - x(\circ) = ۶X(s) - ۳Y(s) \\ sY(s) - y(\circ) = ۱۲X(s) - ۷Y(s). \end{cases}$$

با اعمال شرط اولیه و دسته بندی جملات

$$\begin{cases} (s-۶)X(s) + ۳Y(s) = ۱ \\ -۱۲X(s) + (s+۷)Y(s) = ۴. \end{cases}$$

با استفاده از روش کرامر داریم

$$\begin{aligned} X(s) = \frac{\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & s+۷ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-۶ & ۳ \\ -۱۲ & s+۷ \end{vmatrix}} &= \frac{s+۷-۱۲}{(s-۶)(s+۷)+۳۶} \\ &= \frac{s-۵}{(s-۲)(s+۳)} \\ &= \frac{-۳/۵}{s-۲} + \frac{۸/۵}{s+۳}. \end{aligned}$$

بنابر این

$$x(t) = -\frac{۳}{۵}e^{۲t} + \frac{۸}{۵}e^{-۳t}$$

و

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-۶ & ۱ \\ -۱۲ & ۴ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-۶ & ۳ \\ -۱۲ & s+۷ \end{vmatrix}} = \frac{۴(s-۶)+۱۲}{(s-۶)(s+۷)+۳۶}$$

$$= \frac{۴s-۱۲}{(s-۲)(s+۳)}$$

$$= \frac{-۴/۵}{s-۲} + \frac{۲۴/۵}{s+۳}.$$

بنابر این

$$y(t) = -\frac{۴}{۵}e^{۲t} + \frac{۲۴}{۵}e^{-۳t}. \quad \square$$

تمرینات

با استفاده از تبدیل لاپلاس جواب دستگاه معادله‌های زیر را بیابید.

۱. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۱ & -۳ \\ -۲ & ۲ \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۵ \end{pmatrix}$

۲. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$

۳. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{pmatrix}\mathbf{x} + e^t\begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$

۴. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۴ & ۵ \\ -۲ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} ۴e^t \cos t \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$

۵. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} ۱ - u_\pi(t) \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$

۶. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & -۲ \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} ۰ \\ \delta(t-\pi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(۰) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$

تمرین‌های صفحه ۲۱۸، حالتی که ریشه مضاعف است

۱. $$y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۴^n}{(n!)^۲} x^n, \quad y_۲ = y_۱(x)\ln x - ۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۴^n H_n}{(n!)^۲} x^n$$

۲. $$y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} x^{n+۱} = xe^x, \quad y_۲ = y_۱(x)\ln x + -x\left[\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{H_n}{n!} x^n\right]$$

۳. $$y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} x^{n+۱/۲} = x^{۱/۲}e^{-x},$$

$$y_۲ = y_۱(x)\ln x - x^{۱/۲}\left[\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n H_n}{n!} x^n\right]$$

۴. $$y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} x^{n-۱} = x^{-۱}e^{-x},$$

$$y_۲ = y_۱(x)\ln x - x^{-۱}\left[\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n H_n}{n!} x^n\right]$$

۵. $$y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} x^{n+۲} = x^{۲}e^{-x},$$

$$y_۲ = y_۱(x)\ln x - x^{۲}\left[\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n H_n}{n!} x^n\right]$$

۶. $$y_۱ = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} x^{n-۱/۴} = x^{-۱/۴}e^{-x},$$

$$y_۲ = y_۱(x)\ln x - x^{-۱/۴}\left[\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n H_n}{n!} x^n\right]$$

تمرین‌های صفحه‌ی ۲۲۰، حالتی که تفاضل ریشه‌ها عدد طبیعی N است و $a_N(r_۲)$ دل‌خواه است

۱. $$y = c_۱\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(n+۳)!} x^{n+۱} + c_۲ x^{-۲}\left(۱ - x + \frac{۱}{۲}x^۲\right)$$

۲. $$y = c_۱\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n(n+۱)!}{(۲n+۳)!} x^{۲n+۳} + c_۲\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۲^n n!} x^{۲n}$$

۳. $$y = c_۱\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{(n+۵)!} x^{n+۵} + c_۲\left(۱ + x + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲۴}x^۴\right)$$

تمرین‌های فصل پنجم

تمرین‌های صفحه ۳۲۳، روش حذفی

۱.
$$\begin{cases} x = (c_1 + c_2(1 + 2t) - t - 2t^2)e^t \\ y = (2c_1 + 4c_2 t + 2t - 4t^2)e^t \end{cases}$$

۲.
$$\begin{cases} x = c_2 e^t + c_3 e^{-t} - 1 \\ y = c_2 e^t - c_3 e^{-t} \\ z = c_1 e^t + t e^t \end{cases}$$

۳.
$$\begin{cases} x = c_2 t e^t + c_3 e^t \\ y = c_2 e^t \\ z = c_1 e^{2t} \end{cases}$$

۴.
$$\begin{cases} x = \frac{15}{16} + \frac{7}{8}t + (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{2t} \\ y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t + (c_2 + 6c_3 + 2c_3 t)e^{2t} \\ z = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t - 2c_3 e^{2t} \end{cases}$$

۵.
$$\begin{cases} x = c_1 e^t - c_2 \sin t - c_3 \cos t - 3t - t^2 - 1 \\ y = c_1 e^t - c_2 \cos t + c_3 \sin t - 2t - 4 \\ z = c_1 e^t + c_2 \sin t + c_3 \cos t + t - 2 \end{cases}$$

۶.
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ y = 3e^{3t} - e^{-t} \end{cases}$$

۷.
$$\begin{cases} x = -\frac{5}{4}e^t + \frac{5}{4}e^{3t} - \frac{3}{2}te^t + \frac{3}{2}t^2 e^t \\ y = -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{5}{2}te^t + \frac{3}{2}t^2 e^t \end{cases}$$

۸.
$$\begin{cases} x = \frac{1}{9}e^{3t} - \frac{2}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9} \\ y = -\frac{1}{9}e^{3t} - \frac{4}{9}e^{-3t} + \frac{5}{9} \end{cases}$$